SIACONU IRINA

ISSN 0016-5441

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

10

A148-36

DIN CUPRINS:

- ACAD. PROF. GH. MARINESCU
- NOTE MATEMATICE
- CONCURSUL DE INFORMATICĂ IAȘI 1987
- SOLUȚIILE PROBLEMELOR DATE LA CONCURSUL DE MATEMATICĂ, CLASA A IV-A, ETAPA PE MUNICIPIU, BUCUREȘTI, 1987
- PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU, LICEU, PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M., CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

ANUL XCII nr. 10/1987

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

pag.

1. Academician prof. GHEORGHE MARINESCU, de *Ion Ichim* și *Gheorghe Șirețchi* 337
2. Conf. univ. MIHU CERCHEZ, de *Ilie Petre Jambor* . . . 338
3. Aplicații ale trigonometriei în tetraedrul echifacial, de *Augustin Stan* 339
4. O ecuație în numere naturale, de *Mircea Ganga* 347
5. Probleme selectate din revista „Matematica v școle", selecție făcută de *Liviu Pîrșan* 348
6. Soluțiile problemelor date la concursul de matematică clasa a IV-a, etapa pe municipiu, București, 1987, de *Alexandru Setelecan* 351
7. Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E : 8967, E : 8972, E : 8974, E :8975, E : 8986) 353
8. Probleme rezolvate pentru liceu (20899, 20797, 20914, 20922) . 356
9. Probleme pentru ciclul primar (73—80) 359
10. Probleme pentru gimnaziu (E : 9251— E : 9274) 360
11. Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu (O.G. 57 — O.G. 58) 363
11. Probleme pentru liceu (21233—21260) 363
12. Probleme pregătitoare pentru O.I.M. și O.B.M. (O : 527—O :529) 368
13. Probleme pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C : 729— — C : 736) 368
14. Premianții concursului de matematică, etapa pe țară, Târgoviște, aprilie 1987 370
15. Concursul de informatică, etapa finală, Iași, 1987 371
16. Rubrica rezolvitorilor de probleme, clasele I—IV 377
17. Rubrica rezolvitorilor de probleme 378

ANUL XCII 10 1987

COMITETUL DE REDACȚIE

Lector univ. Dumitru Acu, Sibiu ; lector univ. Toma Albu; lector univ. Horea Banea, Brașov lector univ. Octavian Băscă ; conf. univ. Dan Brânzei, Iași ; prof. Constantin Cărbunaru ; prof. Marcel Chiriță ; prof. Pal Dalyay, Tg. Mureș ; lector univ. Inocențiu Drăghicescu ; prof. Ioana Drăghici ; înv. Alexandrina Dumitru ; prof. Ilie Gheorghiță ; prof. Adrian Ghioca, Sinaia ; cercet. principal Gheorghe Gussi ; lector univ. Stere Ianuș ; prof. Ștefan Kadar, Baia Mare ; lector univ. Constantin Niță ; prof. univ Arpad Pal, Cluj-Napoca ; lector univ. Laurențiu Panaitopol ; prof. Olimpia Popescu, Ploiești ; matem. Paul Rudovici-Mărculescu ; lector univ. Gheorghe Șirețchi ; lector univ. Ioan Tomescu ; prof. Florin Vulpescu-Jalea.

REDACȚIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor șef (delegat) : Acad. N. Teodorescu ; redactori principali : prof. Ilie Ilieșcu, prof. Liviu Pîrșan ; prof. Marcel Țena ; redactori principali onorifici : C. Ionescu-Țiu, asist. univ. Eliferie Rogai ; redactori : prof. Liliana Balaci, prof. Alexandru Constantinescu.

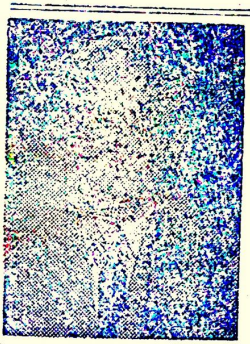
RESPONSABIL DE NUMĂR : prof. LILIANA BALACI

ADRESA REDACȚIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel 14.46.53 — București, 1, cod. 79543.
Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA, Sectorul Export Import-Presă, Calea Griviței nr. 64—66, P.O.Box 12—201, Telex 10376 Prsfir București ROMÂNIA.

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ
PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET
Anul XCII nr. 10 Octombrie 1987



ACADEMICIAN GHEORGHE MARINESCU

de lector dr. Ion Ichim și lector dr. Gheorghe Siretchi

Școala matematică din România încearcă o nouă pierdere dureroasă prin încetarea din viață, la București, în ziua de 10 martie 1987, a profesorului Gheorghe Marinescu, unul din cei mai mari creatori români în domeniul Analizei funcționale și Teoriei probabilităților.

S-a stins din viață în urma unui infarct cardiac care a survenit după ce își terminase ultimele ore de curs din acea zi. Cu mulți ani în urmă mai fusese încercat de aceeași boală pe care a învins-o și cu multă tenacitate și-a continuat activitatea didactică și științifică.

S-a născut la 20 septembrie 1919, în orașul Pitești, oraș cu puternice tradiții culturale. A urmat școala primară și primele clase de liceu în orașul natal, iar ultimele patru clase le-a urmat la Liceul din Giurgiu. În 1937 se înscrie la Facultatea de Științe a Universității din București, secția de matematică, având profesori pe *Simion Stoilow*, *Octav Onicescu*, *Alexandru Ghika*, *Miron Nicolescu*, *Caius Iacob*, renumiți matematicieni ai timpului. Student eminent fiind, *Gheorghe Marinescu* este remarcat și prețuit de profesorii săi.

Din 1943, când își ia licența în matematică și până în 1947 a fost asistent al profesorului *Nicolae Ciorănescu* la catedra de analiză matematică a Institutului Politehnic din București. Începînd cu anul 1947 a funcționat la Universitatea din București. Mai întîi ca asistent al profesorului *Miron Nicolescu* (la Analiză matematică) apoi ca asistent al profesorului *Gh. Vrănceanu* (la Geometrie diferențială și proiectivă). Își susține teza de doctorat în 1949 cu profesorul *Al. Ghika* și în același an este avansat lector și în această calitate a funcționat până în 1951. Alte momente importante din cariera sa : profesor universitar în 1960, director general al învățământului superior în 1962, membru corespondent al Academiei în 1963, șef al catedrei de matematici superioare a Universității din București în 1964, membru titular al Academiei R.S.R. în 1974, șef al catedrei de analiză matematică în 1976.

Opera matematică a academicianului *Gheorghe Marinescu* este foarte diversă și profundă. Ea cuprinde lucrări de mecanică, de teoria probabilităților, de teoria măsurii, de ecuații diferențiale, de analiză, de analiză numerică și de analiză funcțională. În lucrările științifice ale prof. *Gheorghe Marinescu* domină spiritul modern al Analizei funcționale. La vîrsta de 30 de ani, în teza sa de doctorat, susținută în fața unei comisii prezidată de *Simion Stoilow*,*Gheorghe Marinescu* introduce și studiază operatorii relativ complet continui. Același spirit profund novator caracterizează lucrările dedicate lanțurilor cu legături complete, calculului diferențial în spații abstracte, teoriei spațiilor vectoriale pseudotopologice, teoriei distribuțiilor, teoriei schemelor de aproximare etc.

De numele academicianului *Gheorghe Marinescu* sînt legate (într-o perioadă de cumpănă pentru matematica românească) începuturile și dezvoltarea, pe linia școlii bourbakiste, a analizei funcționale în țara noastră. Menționăm aici cărțile sale : Spații vectoriale normate (1956) și Spații vectoriale topologice și pseudotopologice (1959), primele cărți apărute la noi cu această tematică. Contribuțiile sale în această direcție au făcut ca astăzi o anumită clasă de spații liniare să se numească în literatura matematică internațională „Spații Marinescu".

Direcțiile de cercetare inițiate și dezvoltate de acad. *Gheorghe Marinescu* sînt astăzi continuate la noi de numeroși matematicieni de toate vîrstele.

Meritele de cercetător științific ale acad. prof. *Gheorghe Marinescu* sînt ilustrate elocvent și în calitatea sa de profesor. El a predat în facultate cursuri extrem de diverse și de mare

Scanned with OKEN Scanner

actualitate, cum ar fi : ecuații diferențiale, teoria distribuțiilor, analiză funcțională, analiză numerică, analiză matematică. Menționăm aici în mod deosebit cursurile speciale ținute la anul V de specializare : Metoda elementului finit și scheme de aproximare, care intră în sfera mai largă a analizei funcționale aplicate.

Avea o viziune largă, atotcuprinzătoare asupra matematicii, de aceea a introdus numeroase capitole noi din matematicile actuale în cursurile sau cărțile sale, care au intrat ulterior definitiv în programele noastre de învățământ ; menționăm : teoria distribuțiilor, calcul diferențial în spații normate (cu dif. Fréchet și Gâteaux), teoria Leray-Schauder a gradului topologic, capitole speciale de analiză neliniară, analiză numerică, continuitate și dezvoltate astăzi de numeroase cadre didactice de prestigiu.

Activitatea sa didactică este cel mai bine reprezentată în cursurile universitare și tratatele publicate de el. Adăugăm la cele menționate mai sus pe următoarele : Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions, Matematici superioare, Tratat de analiză funcțională (2 vol), Analiză numerică, Tratat de analiză matematică (2 vol.), Applications of the theory of distributions (în colaborare cu prof. dr. *Romulus Cristescu*) și multe altele scrise împreună cu mai tinerii săi colaboratori. Aceste cărți s-au bucurat de o largă audiență din partea specialiștilor și a studenților.

A condus cu competență, de-a lungul anilor, numeroși doctoranzi, atît români cît și străini.

În relațiile sale cu membrii catedrei, cu tinerii săi colaboratori și în general cu celelalte cadre didactice din facultate, a fost înțelegător și calmul său era generator de bună dispoziție. Deși avea în unele probleme propriile sale păreri, nu a încercat în nici o împrejurare să și le impună altora cu orice preț.

Viziunea sa asupra relațiilor umane reiese și din discursul său de recepție la Academie, discurs dedicat operei matematice a lui *Alexandru Ghika* :

„De profesorul *Ghika* însă m-am atașat mult, în parte pentru că disciplina lui se potrivea mai bine spiritului meu de cercetare — aș zice axiomatică — dar desigur și mai mult, datorită calității lui de om bun, detașat de orice ambiții personale, chiar de aceea de a crea o școală care să-i poarte numele".

Posedă o vastă cultură generală cu ramificații în afara matematicii. Cu o distincție de tradiție clasică, lipsit de capricii și discontinuități, o discuție purtată cu el era tonică, plină de optimism.

Avea o construcție fizică fragilă și în acest agitat sfîrșit de secol, inima sa firavă a cedat mult prea devreme. Nu a vrut, mai probabil însă nu a putut să se despartă de facultate. Prin meritele sale incontestabile, cîștigate în munca de-o viață de om, acad. prof. *Gheorghe Marinescu* și-a dobîndit un loc de prestigiu în matematică și în școala românească.

CONF. UNIV. CERCHEZ MIHU

de Ilie Petre Jambor, profesor, București

Școala românească de astăzi este slujită de o pleiadă de oameni care se dăruiesc cu pasiune idealurilor nobile închinate școlii, muncii oferite cu generozitate instruirii și educării generațiilor de elevi și studenți.

Unul dintre acești oameni a fost și conf. univ. Cerchez Mihu. Fiind model de conștiinciozitate, punctualitate și modestie, toți cei care l-au cunoscut și înconjurat zi de zi l-au oferit înalte considerații și respectul bine meritat.

Cerchez Mihu s-a născut la 1 noiembrie 1910 la Roman. În 1937 a obținut licența în matematică la Facultatea de Științe din Cernăuți, iar cîțiva ani mai tîrziu s-a hotărît să devină și inginer, astfel că în 1944 obține diploma de inginer electromecanic la Școala Politehnică din București.

În perioada 1936—1945 a profesat meseria de profesor de matematică la Cernăuți, Chișinău și București, la liceele Gh. Lazăr și Mihai Viteazul. Timp de 13 ani a activat ca inginer în diverse funcții importante în Departamentul Căilor Ferate. După aceea s-a dedicat învățământului superior, fiind conferențiar la Academia Militară.

La 1 noiembrie 1975, după 39 ani de muncă, se retrage la pensie dar își continuă activitatea pe tărîm publicistic. Scrie numeroase articole cu caracter științific, note de matematică, publicate în paginile *Gazetei Matematice*, ale revistei *Știință și Tehnică* și în alte reviste.

A publicat peste 20 de lucrări de specialitate. Dintre acestea amintim „*Aplicații ale matematicii în practică*", lucrare în care spiritul practic, ingineresc, îl determină să arate că matematicile slujesc diverselor discipline tehnice și economice. Lucrarea a fost apreciată de mulți specialiști din diverse domenii și ca urmare a apărut în patru ediții.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd teorema celor trei perpendiculare rezultă că și $AN \perp BC$, adică unghiul ANM este unghiul plan corespunzător unghiului diedru format de planele (ABC) și (BCD). Fie $BC = a$ și din triunghiul dreptunghic MAN avem $h = AN \cdot \sin\alpha$, iar din triunghiul ABC avem $AN = \frac{2 \cdot S}{a}$. Folosindu-ne de acestea obținem:

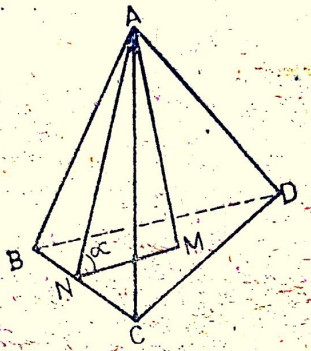


fig. 1.

$$V = \frac{S \cdot h}{3} = \frac{S \cdot AN \cdot \sin\alpha}{3} = \frac{S \cdot \frac{2 \cdot S}{a} \cdot \sin\alpha}{3} = \frac{2 \cdot S^2 \cdot \sin\alpha}{3a},$$

celelalte egalități obținîndu-se în mod analog.

Inversînd fiecare raport al relației (1) și înmulțind relația astfel obținută cu $\frac{2 \cdot S^2}{3}$, ajungem la *teorema sinusurilor pentru tetraedrul echifacial*:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{2 \cdot S^2}{3 \cdot V}, \qquad (2).$$

Notînd cu $\frac{1}{k} = \frac{2 \cdot S^2}{3V}$, din relația (2) rezultă că $\sin\alpha = a \cdot k$, $\sin\beta = b \cdot k$, din care obținem în continuare că:

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{a - b}{a + b}.$$

Transformînd în membrul stîng al egalității anterioare, numărătorul și numitorul în produs, obținem *teorema tangentelor pentru tetraedrul echifacial*:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{a - b}{a + b},$$

alte relații se obțin prin permutări circulare.

II. Exprimarea razelor sferelor înscrise și circumscrise tetraedrelor echifaciale în funcție de celelalte elemente

În [2] se află propusă ca problemă următorul rezultat:

$$V = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(b^2 + c^2 - a^2) \cdot (c^2 + a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}}{12}.$$

Notînd cu $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$, volumul tetraedrului echifacial se poate exprima mai concis

$$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(P - a^2) \cdot (P - b^2) \cdot (P - c^2)}, \tag{3}$$

(formulă analoagă formulei lui *Heron* din geometria triunghiului), sau ținînd seama de teorema cosinusului:

$$P - a^2 = bc \cdot \cos A, \quad P - b^2 = ac \cdot \cos B, \quad P - c^2 = ab \cdot \cos C,$$

obținem formula

$$V = \frac{abc}{3} \cdot \sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}, \tag{4}$$

Se cunoaște (vezi [3]) că raza sferei inscrise într-un tetraedru se poate exprima prin formula

$$r' = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4},$$

în care $S_i, i = \overline{1, 4}$, reprezintă ariile fețelor tetraedrului. Obținem deci pentru tetraedrul echifacial $r' = \frac{3V}{4S}$ și ținînd seama de (3) avem

$$r' = \frac{\sqrt{(P - a^2) \cdot (P - b^2) \cdot (P - c^2)}}{4S}, \tag{5}$$

sau folosindu-ne de formula (4), avem

$$r' = \frac{abc \cdot \sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}}{4S} = R \cdot \sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C},$$

adică

$$r' = R \cdot \sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}, \tag{6}$$

Pentru calculul razei sferei circumscrise tetraedrului ne vom folosi de triunghiul ONC (v. fig. 2), unde O este centrul sferei inscrise tetraedrului, $ON \perp (BCD)$. Ținînd seama de (iv) și (v) vom avea $ON = r'$, $OC = R'$, $NC = R$. Aplicînd teorema lui *Pitagora* în triunghiul ONC se obține

$$R'^2 = R^2 + r'^2 = R^2 + R^2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C,$$

adică

$$R' = R \cdot \sqrt{1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}, \tag{7}$$

Cu ajutorul identității condiționate:

$$1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \frac{1}{2} \cdot (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

și înlocuind pe $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ din teorema sinusului aplicată unei fețe a tetraedrului obținem:

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}, \quad \text{sau} \quad R' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{P}. \tag{8}$$

III. Formule care exprimă unghiurile diedre ale tetraedrului echifacial în funcție de muchiile sau unghiurile plane ale unei fețe.

O — fiind centrul sferei inscrise tetraedrului (v. fig. 2), el se află la intersecția planelor bisectoare ale unghiurilor diedre ale tetraedrului. Avînd $ON \perp (BCD)$ și ducînd $NM \perp BC$, obținem, cu ajutorul teoremei celor trei perpendiculare, că și $OM \perp BC$; OM fiind conținută

Scanned with OKEN Scanner

În planul bisector al unghiului diedru de muchie $BC = a$ este bisectoarea unghiului plan corespunzător diedrului de muchie BC, adică măsura unghiului OMN este $\frac{\alpha}{2}$; N fiind centrul cer-

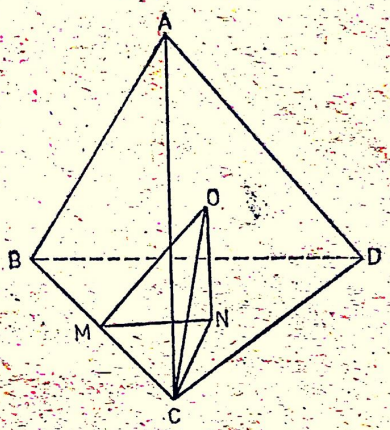


fig. 2.

cului circumscris feței BCD și $MN \perp BC$, urmează că MN este mediatoarea segmentului BC, adică $MC = \frac{a}{2}$. Din teorema lui *Pitagora* aplicată în triunghiul OMC ($\sphericalangle M = 90°$), avem

$$OM^2 = OC^2 - MC^2 = R'^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{8}$$

și deci: $OM = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{P - a^2}$.

Calculăm în continuare din triunghiul MON:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r'}{OM} = \frac{\sqrt{(P-b^2)\cdot(P-c^2)}}{2S}, \text{ deci:}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{(P-b^2)\cdot(P-c^2)}}{2S}, \tag{9}$$

Deoarece $S = \frac{ab\cdot\sin C}{2} = \frac{ac\cdot\sin B}{2}$, avem $4S^2 = a^2bc\cdot\sin B\cdot\sin C$, adică $2S = a\cdot\sqrt{bc\cdot\sin B\cdot\sin C}$ și înlocuind în relația (9), avem:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{ac\cdot\cos B\cdot ab\cdot\cos C}}{a\cdot\sqrt{bc\cdot\sin B\cdot\sin C}} = \sqrt{\operatorname{ctg} B\cdot\operatorname{ctg} C},$$

adică

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\operatorname{ctg} B\cdot\operatorname{ctg} C}, \tag{10}$$

care ne dă $\sin\frac{\alpha}{2}$ în funcție de unghiurile plane ale unei fețe.

Aplicînd teorema lui *Pitagora* în triunghiul NMC avem:

$$MN^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2b^2c^2}{16\cdot S^2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{16\cdot S^2}\cdot(b^2c^2 - 4S^2),$$

dar folosindu-ne de formula lui *Heron* obținem:

$$b^2c^2 - 4S^2 = b^2c^2 - \frac{2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{2} = (P - a^2)^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

Iar de aici urmează

$$MN = \frac{a \cdot (P - a^2)}{4S}$$

și

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{MN}{OM} = \frac{a \cdot (P - a^2)}{4S} \cdot \frac{2}{\sqrt{P - a^2}} = \frac{a\sqrt{P - a^2}}{2S}$$

adică

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{P - a^2}}{2S}, \tag{11}$$

Înlocuind pe $2S$ cu $a \cdot \sqrt{bc \cdot \sin B \cdot \sin C}$ și pe $P - a^2$ cu $bc \cdot \cos A$, obținem pe $\cos\frac{\alpha}{2}$ în funcție de unghiurile unei fețe

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos A}{\sin B \cdot \sin C}}, \tag{12}$$

Cu ajutorul relațiilor (9), (10), (11) și (12) se obțin următoarele formule:

$$\sin\alpha = \frac{2 \cdot \sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}}{\sin B \cdot \sin C} \tag{13}$$

$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot \cos A}{\sin B \cdot \sin C} - 1 \tag{14}$$

$$\cos\alpha = 1 - 2 \cdot \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C \tag{15}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(P - b^2) \cdot (P - c^2)}{a^2 \cdot (P - a^2)}} \tag{16}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos B \cdot \cos C}{\cos A}} \tag{17}$$

IV. Formule care exprimă funcțiile trigonometrice ale semisumei și semidiferenței a două unghiuri diedre ale tetraedrului echifacial, în funcție de celelalte elemente.

Cu ajutorul formulelor găsite anterior calculăm pe $\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$:

$$\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} =$$

$$= ab \cdot \frac{\sqrt{(P - a^2) \cdot (P - b^2)}}{4S^2} - \frac{\sqrt{(P - a^2) \cdot (P - b^2) \cdot (P - c^2)^2}}{4S^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(P - a^2) \cdot (P - b^2)}}{4S^2} \cdot (ab - P + c^2) = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2S} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\gamma}{2} \cdot (p - a) \cdot (p - b)}{\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}} = \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$;

4) $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} = 2$;

5) $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = 1$;

6) $V = \frac{abc}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$;

7) $r = \frac{S}{2a} \cdot \sin\alpha = \frac{S}{2b} \cdot \sin\beta = \frac{S}{2c} \cdot \sin\gamma$;

8) $r = R \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$;

9) $4Sr = a(P-a^2)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = b(P-b^2)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = c(P-c^2)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$;

10) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}$ (şi analoagele);

11) $\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{1+\cos\gamma} = \frac{b^2-a^2}{c^2}$ (şi analoagele);

12) $\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{ctg}^2\frac{C}{2}$ (şi analoagele);

13) $a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} + b\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2} + c\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$;

14) $a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} + b\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2} + c\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = 4p$;

15) $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{p}{R}$;

16) $\frac{a^2}{1+\cos\alpha}(\cos\beta - \cos\gamma) + \frac{b^2}{1+\cos\beta}(\cos\gamma - \cos\alpha) + \frac{c^2}{1+\cos\gamma}(\cos\alpha - \cos\beta) = 0$;

17) $ab\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + bc\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + ca\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 4R^2$;

Scanned with OKEN Scanner

18) $\cos A \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos B \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \cos C \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{3r}{R}$;

19) $P - a^2 = bc \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ (și analoagele);

20) $\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{P-a^2} + \frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{P-b^2} + \frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{P-c^2} = \frac{1}{2rr'}$.

Să se demonstreze că următoarele inegalități sînt adevărate (egalitățile se obțin pentru tetraedrul regulat):

1) $r' \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot R$;

2) $\operatorname{cosec}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cosec}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{cosec}^2\frac{\gamma}{2} \geqslant 9$;

3) $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{P}{2S}$;

4) $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{a^2} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{b^2} + \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{c^2} \leqslant \frac{3}{4S}$;

5) $\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{a^2} + \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{b^2} + \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{c^2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2S}$;

6) $\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{2\sqrt{6}}{9}$;

7) $\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{2R^2}{S}}$;

8) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{\sqrt[3]{V}}{2p}$;

9) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant 6$;

10) $\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} + \frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} + \frac{\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}} \geqslant 1$;

Scanned with OKEN Scanner

11) $\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)^2\geqslant 1$;

12) $\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\operatorname{cosec}\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}+\operatorname{cosec}\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\geqslant\sqrt{3}$;

13) $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sec\frac{\beta-\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sec\frac{\gamma-\alpha}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sec\frac{\alpha-\beta}{2}\geqslant\sqrt{3}$;

14) $V\leqslant\sqrt{3}\cdot\left(\frac{2}{3}R'\right)^3$.

Bibliografie

[1] *V. E. Matizen*: „Tetraedre echifaciale și carcasă", articol apărut în revista „Kvant" nr. 7/1983 pag. 34—38.

[2] *G. Țițeica*; „Probleme de geometrie", ediția a VI-a, Ed. Tehnică, 1982.

[3] *A. Coșa*, ș.a.: „Geometrie și trigonometrie", manual pentru clasa a X-a, ed D.P., 1984.

O ECUAȚIE ÎN NUMERE NATURALE

de prof. Mircea Gangu, Ploiești

În această notă matematică ne propunem să prezentăm o metodă de rezolvare a ecuației

$$3^{x_1}+3^{x_2}+\ldots+3^{x_9}=19683, \text{ unde } x_i\in\mathbb{N},\ i=\overline{1,n}.$$

Precizăm că această problemă figurează în cunoscuta culegere „Exerciții și probleme de algebră" de *C. Năstăsescu, C. Niță, M. Brandiburu, D. Joița*, la pag. 124, cap. XXI, problema 37, fără a fi indicat și un mod de rezolvare al acesteia.

Scriem ecuația sub forma

$$\frac{3^{x_1}+3^{x_2}+\ldots+3^{x_9}}{9}=3^7.$$

Pentru membrul stîng aplicăm inegalitatea mediilor și obținem:

$$\frac{3^{x_1}+3^{x_2}+\ldots+3^{x_9}}{9}\geqslant\sqrt[9]{3^{\sum_{i=1}^{9}x_i}}\quad\text{și deci}$$

$$3^{9\cdot7}\geqslant 3^{\sum_{i=1}^{9}x_i},\ \text{de unde}\ \sum_{i=1}^{9}x_i\leqslant 63.$$

Analizăm mai multe cazuri:

1) Dacă $x_1=x_2=\ldots=x_9=7$, ecuația se verifică iar în inegalitatea mediilor avem egalitate.

Scanned with OKEN Scanner

2. Rezolvați în numere naturale ecuația :

$$(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = 4(xz + yt)^2.$$

3. Rezolvați ecuația :

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = a.$$

Discuție.

4. Pentru ce valori întregi a și b produsul a două dintre rădăcinile ecuației

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

este 3?

5. Există o infinitate de numere naturale n astfel încît $2^n + n^2$ să se dividă cu 100?

6. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, avem :

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4 \ldots \sqrt{n}}}} < 3.$$

7. Găsiți cifrele x, y, z din egalitatea :

$$\overline{xyz}^y = \overline{yz}^{y+1}.$$

8. Găsiți valorile parametrului a pentru care suma pătratelor tuturor rădăcinilor ecuației :

$$\log_a |x - 2a| + \log_a x = 2$$

este 4.

9. În patrulaterul convex $ABCD$ punctul E este intersecția diagonalelor. Se știe că ariile triunghiurilor ABE și CDE sînt egale între ele, iar diagonala AC este bisectoarea unghiului A. Dacă $AB = 4$, calculați BC.

10. Găsiți locul geometric al centrelor triunghiurilor echilaterale care au cele trei vîrfuri pe laturile unui pătrat dat.

11. Există $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încît să avem :

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} > \sqrt{c(ab+1)}?$$

12. Care dintre numerele :

$$2\sqrt{1} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{9} \quad \text{și} \quad 2\sqrt{2} + 2\sqrt{4} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{8} + \sqrt{10}$$

este mai mare?

13. Găsiți partea întreagă a numărului :

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \ldots + \sqrt[3]{6}}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. a) $50 + 50 : 5 \times 2 - 5 \times 2 = 50 + 10 \times 2 - 10 =$
$= 50 + 20 - 10 = 60.$

b) $a = 0$. Un produs este egal cu 0 dacă cel puțin unul din factori este 0.

c) Cel mai mic număr natural este 0. Cel mai mare număr natural nu există.

d) Un număr de trei cifre are forma $\overline{abc}$. Cum $a + b + c = 1$, avem a, b, c cu valori 0 sau 1, dar a este 1, altfel nu ar fi număr din trei cifre, deci numărul este 100.

II. *Într-un magazin era o cantitate de pînză la prețul de 30 lei metrul. Aducîndu-se o altă cantitate de pînză cu același preț unitar, în valoare de 18 000 lei, întreaga cantitate de pînză (de aceeași calitate) a devenit de patru ori mai mare decît era în magazin la început. Cîtă pînză era la început în magazin? Justificați.*

* * *

Soluții. Metoda 1. 1) Cîți metri de pînză s-au mai adus?

$$18\,000 : 30 = 600 \text{ (m)}.$$

2) Dacă notăm cu x cantitatea de pînză care era la început în magazin rezultă:

$$600 + x = 4x;\ 3x = 600;\ x = 200 \text{ m}.$$

Metoda a 2-*a*. 1) Cantitatea de pînză din magazin reprezintă o parte iar cea adusă trei părți. Deoarece trei părți costă 18000 lei, o parte costă 6000 lei (18000 : 3).

2) $6000 : 30 = 200$ (m)

3) La început, în magazin, erau 200 m de pînză.

III. *La un concurs, Societatea de Științe Matematice din R.S.R. a cumpărat, în valoare de 900 lei, 2 servicte (de același preț fiecare) pentru 2 premii și 3 truse de compas (de același preț fiecare) pentru 3 mențiuni. În urma rezultatelor s-a constatat că se pot acorda trei premii și două mențiuni. De aceea, s-a renunțat la o trusă, s-au mai adăugat 100 lei și s-a mai cumpărat o servietă. Aflați prețul servietei și prețul trusei. Justificați răspunsul.*

(*L. Grîu, T. Roman*)

Soluții: Metoda 1. Suma totală cheltuită este $900 + 100 = 1000$ (lei)
Avem succesiv:

2 servicte și 3 truse costă 900 lei
3 servicte și 2 truse costă 1000 lei
6 servicte și 9 truse costă 2700 lei
6 servicte și 4 truse costă 2000 lei

Rezultă că 5 truse costă 700 lei, de unde o trusă costă $700 : 5 = 140$ lei, iar 2 servicte costă $900 - 3 \times 140 = 480$ lei.
Deci o servietă costă 240 lei (480 : 2).

Metoda a 2-*a*. Fie s prețul unei servicte și t prețul unei truse. Avem:

$$2s + 3t = 900$$
$$3s + 2t = 1000.$$

Scanned with OKEN Scanner

Adunînd cele două egalități obținem $5s + 5t = 1900$, deci împărțind la 5 avem

$$1s + 1t = 380.$$

Înmulțim această relație cu 2 și avem

$$2s + 2t = 760$$

și ținînd cont că

$$2s + 3t = 900$$

obținem $t = 900 - 760$, adică $t = 140$.
O trusă costă 140 lei, o servietă costă 240 lei.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E : 8967* (G.M. 10/1986, pag. 393)

Să se determine toate numerele naturale de cinci cifre de forma $\overline{52a2b}$ *scrise în baza* 10, *care sînt divizibile cu* 36.

Lajos Biro, profesor, Huedin, Cluj

Soluție. Punînd condițiile ca numărul $\overline{52a2b}$ să fie divizibil cu 4 și cu 9 va rezulta că $\overline{52a2b}$ este divizibil cu 36. Din condiția de divizibilitate a numărului $\overline{52a2b}$ cu 4 rezultă $b \in \{0, 4, 8\}$.
Fie acum numerele : $\overline{52a20}$, $\overline{52a24}$, $\overline{52a28}$.
Din condiția ca $\overline{52a20} : 9$ rezultă $a \in \{0; 9\}$; din condiția ca $\overline{52a24} : 9$ rezultă $a = 5$; din condiția ca $\overline{52a28} : 9$ rezultă $a = 1$.
Deci numerele care satisfac enunțul problemei sînt : 52020, 52920, 52524, 52128.

Soluție bună au dat *Mihai Cosmin*, cl. a V-a, Șc. gen. 10 Tîrgoviște; *Ginghina Cristina*, cl. a V-a, Șc. gen. 2 Tîrgu Bujor; *Bănică Valeria*, cl. a V-a, Șc. gen. 172 București.

Clasa a VI-a

Problema E : 8972* (G.M. 10/1986, pag. 394)

Într-un triunghi ABC, *în care unghiul* $\hat{B}$ *este media aritmetică a unghiurilor* $\hat{A}$ *și* $\hat{C}$, *înălțimea* $AE (E \in BC)$ *și bisectoarea* $BD (D \in AC)$ *a unghiului* $\hat{B}$ *se intersectează în* M. *Să se demonstreze că* $3 \cdot BM = 2 \cdot AE$.

Maria și Nicolae Vizuroiu, profesori, Pitești

Soluție. Ținînd seama de relațiile $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ și $\hat{B} = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$, rezultă $\hat{B} = 60°$, de unde $\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = 30°$. Deoarece AE

este înălțime avem $\widehat{AEB} = 90°$. În triunghiul dreptunghic BEM ($\widehat{BEM} = 90°$) avem $\widehat{MBE} = 30°$, deci cateta opusă lui este egală cu jumătate din ipotenuză, adică $ME = \frac{BM}{2}$, (1). În triunghiul dreptunghic AEB ($\widehat{AEB} = 90°$) avem $\hat{B} = 60°$, deci $\widehat{BAE} = 30°$. Rezultă că triunghiul AMB este isoscel (deoarece $\widehat{BAM} = \widehat{ABM} = 30°$), de unde $AM = BM$, (2). Lungimea înălțimii AE, ținînd cont de (1) și (2), va fi:

$$AE = AM + ME = BM + \frac{BM}{2} \Rightarrow 2AE = 3BM.$$

Soluție bună au dat *Florea Sebastian*, cl. a VI-a, Șc. gen. 7 Făgăraș; *Niță Veronica*, cl. a VI-a, Șc. gen. Tîrgoviște; *Georgescu Cristian*, cl. a VI-a, Șc. gen. 28 Galați.

Problema E: 3374* (G.M. 10/1986, pag. 394)

Să se determine toate numerele de forma $\overline{400xyzt}$ *pătrate perfecte.*

Ion Șerban, elev, Săpata de Sus, Argeș

Soluție. Cel mai mic număr de forma $\overline{400xyzt}$ este 4000000, iar cel mai mare este 4009999. Extrăgînd radicalul din aceste numere se obține:

$$\sqrt{4000000} = 2000 \text{ și } \sqrt{4009999} = 2002 \text{ rest } 1995.$$

Deci pătratele numerelor 2000, 2001 și 2002 vor fi de forma cerută în enunț. Aceste numere sînt: 4000000; 4003001 și 4008004.

Soluție bună au dat *Răduț Mihaela*, cl. a VI-a, Șc. gen. 10 Slatina; *Grapă Geanina*, cl. a VI-a, Șc. gen. 7 Roman; *Pintea Ovidiu*, cl. a VI-a, Lic. ind. Predeal.

Clasa a VII-a

Problema E: 3375* (G.M. 10/1986, pag. 394)

În triunghiul ascuțitunghic ABC punctele M, N, P sînt mijloacele laturilor AB, AC respectiv BC și AA', BB', CC' sînt înălțimile triunghiului. Să se demonstreze că triunghiurile $A'NM$, $B'MP$ și $C'NP$ sînt congruente.

Nicolae Dimeny, elev, Crasna, Sălaj

Soluție. Deoarece M și N sînt mijloacele laturilor AB și AC rezultă că MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $MN = \frac{BC}{2}$. În triunghiul dreptunghic $AA'B$ ($\widehat{AA'B} = 90°$), MA' este mediană, de unde rezultă că $MA' = \frac{AB}{2}$. De asemenea, în triunghiul dreptunghic $AA'C$

Scanned with OKEN Scanner

($\widehat{AA'C} = 90°$), NA' este mediană, deci $NA' = \frac{AC}{2}$. Prin urmare, lungimile laturilor triunghiului $A'MN$ au lungimile:

$$A'M = \frac{AB}{2},\ A'N = \frac{AC}{2} \text{ și } MN = \frac{BC}{2}, \tag{1}$$

Analog, lungimile laturilor triunghiului $B'MP$ sînt:

$$B'M = \frac{AB}{2},\ B'P = \frac{BC}{2} \text{ și } MP = \frac{AC}{2}, \tag{2}$$

și lungimile laturilor triunghiului $C'NP$ sînt:

$$C'N = \frac{AC}{2},\ C'P = \frac{BC}{2} \text{ și } NP = \frac{AB}{2}, \tag{3}$$

Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă că $\Delta A'MN \equiv \Delta B'MP \equiv \Delta C'NP$ (caz L.L.L.), ceea ce trebuia demonstrat.

Soluție bună au dat: *Popescu Bogdan*, cl. a VII-a, Șc. gen. 7 Botoșani; *Brodea Mihai*, cl. a VII-a, Șc. gen. 24 Galați; *Grama Daniel Matei*, cl. a VII-a, Șc. gen. 5 București.

Clasa a VIII-a

Problema E: 8986* (G.M. 10/1986, pag. 396)

În triunghiul MAB vîrfurile A și B sînt fixe, iar M mobil. Să se afle locul geometric al punctului M știind că între lungimile laturilor există relația:

$$MA^2 + MB^2 = MA \cdot MB + AB^2.$$

Silvia Rădulescu, profesoară, Plosca, Teleorman

Soluție. Vom folosi teorema lui *Pitagora* generalizată în triunghiul MAB. Din relația din enunț se vede că $AB^2 < MA^2 + MB^2$, deci AB se opune unui unghi ascuțit, adică $\widehat{M}$ este un unghi ascuțit. Notînd cu N proiecția lui B pe dreapta AM, va rezulta că N se află pe semidreapta MA (căci unghiul $\widehat{M}$ este ascuțit). Teorema lui *Pitagora* generalizată dă egalitatea

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MN,$$

care comparată cu egalitatea din enunț scrisă sub forma

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - MA \cdot MB$$

conduce la $2MA \cdot MN = MA \cdot MB$. Rezultă $MN = \frac{MB}{2}$ și atunci în triunghiul dreptunghic BNM, rezultă $\widehat{NBM} = 30°$, deci $\widehat{M} = 60°$.

Rezultă că segmentul fix AB se vede din punctul mobil M sub un unghi de măsură constantă și anume 60°. Prin urmare locul geometric al lui M este reuniunea celor două arce de cerc capabile de unghiul de 60° ce subîntind segmentul AB. Aceste arce sînt simetrice față de AB.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție bună au dat: *Ceaușu Bodea*, cl. a VIII-a, Șc. gen. Pericți; *Huțanu Emy*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 12 Botoșani.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 20899* (G. M. 10/1986, pag. 397)

Se dă patrulaterul convex $ABCD$. Să se determine un punct M în interiorul lui, astfel încît suma $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ să fie minimă.

Liviu Vlaicu, profesor, Zalău

Soluție. Fie P, Q, R respectiv S mijloacele laturilor AB, BC, DC, respectiv AD. Notăm cu x, y, z, t respectiv $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ lungimile segmentelor MA, MB, MC, MD respectiv MR, MS, MP, MQ. Aplicăm teorema medianei în triunghiurile MAD și MBC. Obținem:

$$4\beta^2 + d^2 = 2(x^2 + t^2) \text{ și } 4\delta^2 + b^2 = 2(y^2 + z^2)$$

de unde prin adunare rezultă că

$$2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = b^2 + d^2 + 4(\beta^2 + \delta^2).$$

Deoarece $b^2 + d^2$ este constantă, expresia $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ este minimă cînd $\beta^2 + \delta^2$ este minimă.

Fie N mijlocul segmentului SQ. Aplicăm teorema medianei în triunghiul MSQ și obținem

$$\beta^2 + \delta^2 = \frac{SQ^2}{2} + 2MN^2$$

deci $\beta^2 + \delta^2$ este minimă cînd segmentul MN este minim, deci cînd $M = N$, adică M este mijlocul segmentului SQ.

Procedînd analog cu triunghiurile MAB și MDC, rezultă că expresia dată este minimă cînd M este mijlocul segmentului PR. Dar patrulaterul $SPQR$ este paralelogram deci mijloacele segmentelor SQ și PR coincid. În concluzie suma $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ este minimă cînd punctul M coincide cu intersecția diagonalelor din paralelogramul $SPQR$.

Soluție bună au dat: *Drăghici Roxana*, cl. a IX-a, Lic. ind. Cîmpina, *Nemescu Dragoș*, cl. a IX-a, Lic. „C. Negruzzi" Iași.

Clasa a X-a

Problema 20797* (G.M. 6/1986, pag. 221)

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{27}\right)^y = \frac{5}{6} \\ \log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{27}} y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

V. Chiriac, profesor, Bacău

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Deoarece $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ și $\log_{1/4}\frac{1}{2}-\log_{1/27}\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ rezultă că $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$ este o soluție a sistemului. Să demonstrăm că această soluție este unică.

Funcțiile exponențială și logaritmică sînt monotone deci vom deosebi cazurile:

1) $x>\frac{1}{2}$ și $y>\frac{1}{3}$. Avem:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x<\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \text{ și } \left(\frac{1}{27}\right)^y<\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}.$$

Deci $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{27}\right)^y<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$, deci sistemul nu admite soluții $x>\frac{1}{2}$ și $y>\frac{1}{3}$.

2) $x>\frac{1}{2}$ și $y<\frac{1}{3}$. Avem:

$$\log_{1/4}x<\log_{1/4}\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \text{ și } \log_{1/27}y>\log_{1/27}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Deci $\log_{1/4}x-\log_{1/27}y<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ și a doua ecuație a sistemului nu este verificată.

3) $x<\frac{1}{2}$ și $y<\frac{1}{3}$. Avem:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{27}\right)^y>\frac{5}{6}$$

și sistemul nu admite soluții $x<\frac{1}{2}$ și $y<\frac{1}{3}$.

4) $x<\frac{1}{2}$ și $y>\frac{1}{3}$. Avem:

$$\log_{1/4}x-\log_{1/27}y>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

deci nu admite soluții $x<\frac{1}{2}$, $y>\frac{1}{3}$.

Soluție bună au dat: *Dăbija Florentina*, cl. a X-a, Lic. ... B.P. Hasdeu" Buzău; *Cojocaru Alina*, cl. a X-a, Lic. ind. Motru.

Scanned with OKEN Scanner

78. Găsiți trei numere naturale diferite x, y, z astfel încît $x \times y \times z = 1980$.

79. Perimetrul unui dreptunghi este 264 cm. Lungimea este cu 36 cm mai mare decît lățimea. Aflați lungimea și lățimea dreptunghiului.

80. Aflați pe a, b, c, d din egalitățile:

$$(88 - a) \times 2 = 156; \qquad (77 - b) - 25 = 13;$$

$$(90 : c) : 2 = 15; \qquad (d : 8) : 6 = 13.$$

(Problemele 73—80 sînt prelucrate de *L. Pîrșan*)

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9251*. Să se determine mulțimea:

$$A = \left\{ \overline{abc} \;\middle|\; \frac{\overline{abc}}{9(a+b+c)} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Damian Marinescu, profesor, Tîrgoviște

E : 9252. Să se arate că: a) $2^{1987} > 3^{1241}$; b) $3^{1987} > 4^{1490}$; c) $4^{1987} > 5^{1703}$.

Damian Marinescu, profesor, Tîrgoviște

E : 9253*. Să se determine toate numerele de forma $\overline{aabb}$ divizibile cu numărul compus $\overline{ab}$ în a cărui descompunere se află factorul 3^{2k}, $k \in \mathbb{N}^*$.

Maria Vizuroiu, Nicolae Vizuroiu, profesori, Pitești

E : 9254. Determinați cifrele a, b, c din egalitatea:

$$\overline{ab}^2 + \overline{cc}^2 = \overline{ba}^2.$$

Liviu Pîrșan

E : 9255. Media aritmetică a trei numere este 86. Un număr este $0,1(6)$ din alt număr, iar cel mai mare număr este de $7,(3)$ ori mai mare decît cel mai mic număr. Să se afle numerele.

Nicoleta Cruceru și *Ștefan Cruceru*, profesori, Craiova

E : 9256*. Dacă $n \in \mathbb{N}$ să se demonstreze că:

$A = 7^n \cdot 3^{n+1} + 3^n \cdot 7^{n+1} + 7 \cdot 21^n$ este divizibil cu 17.

$B = 5^n \cdot 7^{n+1} + 7^n \cdot 5^{n+1} + 17 \cdot 35^n$ este divizibil cu 29.

Ion Predescu, profesor, Rast, Dolj

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VI-a

E : 9257*. Să se determine a, b, c astfel încît :

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{bac} = 900 \text{ unde } a < b < c.$$

Adrian Tudorașcu, elev, Făurești, Vîlcea

E : 9258. Să se arate că expresia :

$$E = [(2x + 1)(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 9^3)] - [(2y + 1)(2^3 + 6^3 + 7^3)]$$

se divide cu 18, oricare ar fi numerele întregi x și y.

Ioan Bran, inginer, Botoșani

E : 9259*. Să se determine numărul prim $\overline{ab}$ știind că partea întreagă a numărului $\sqrt{\overline{ab}}$ este 6 și că suma cifrelor numărului este 5.

Ligia Chiroiu, studentă, București

E : 9260. Să se afle mulțimea de perechi (x, y) care verifică egalitatea

$$\overline{0,xx(y)} - \overline{0,yy(x)} = \frac{1}{5}\left(0,98(1) + \frac{97}{900}\right),$$

numerele fiind scrise în baza zece.

Mihai N. Ionescu, cercetător, Pitești

E : 9261. Cîte numere naturale se pot scădea din 2768, astfel încît diferența, tot număr natural, să fie divizibilă cu 5 și cu 9?

Constantin Dinu, profesor, Zătreni, Vîlcea

E : 9262*. Să se arate că, oricare ar fi numerele reale a, b, c, $\min(a - b, b - c) + \min(b - c, c - a) + \min(c - a, a - b) = \max(a - b, b - c) + \max(b - c, c - a) + \max(c - a, a - b)$ dacă și numai dacă $a = b = c$.

Dragoș Constantinescu, profesor, Rm. Vîlcea

Clasa a VII-a

E : 9263. Fie triunghiul ABC înscris în cercul de centru O și H ortocentrul acestui triunghi. Înălțimile AA', BB' și CC' intersectează cercul în punctele A_1, B_1, C_1. Să se arate că :

1) Patrulaterele $A'B'A_1B_1$, $A'C'C_1A_1$ și $B'C'C_1B_1$ sînt trapeze.

2) CO, AO și BO sînt bisectoarele unghiurilor $\widehat{A_1OB_1}$, $\widehat{B_1OC_1}$ respectiv $\widehat{A_1OC_1}$.

Maria Vasilescu, profesoară, Rm. Vîlcea

Scanned with OKEN Scanner

E : 9264*. Să se determine toate numerele de forma $\overline{abca}$, în baza 10 divizibile cu 9, știind că:

$$a^2 + ab = 2b^2.$$

Alexandru Cehuz, profesor, Cotcana, Olt

E : 9265. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC în care $\hat{B} > \hat{C}$. Dacă bisectoarea unghiului $\hat{A}$ taie latura BC în M iar cercul în N astfel încît unghiul $\widehat{BMN} = 105°$, atunci să se determine măsura unghiului $\widehat{ACN}$.

Ion Predescu, profesor, Rast, Dolj

E : 9266*. Două cercuri $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ se intersectează în două puncte distincte A și B. Coardele MN, în cercul $\mathcal{C}$, respectiv PQ, în cercul $\mathcal{C}'$, sînt paralele cu AB. Să se demonstreze că punctele M, N, P, Q sînt vîrfurile unui trapez isoscel, sau ale unui dreptunghi.

Ion Diaconu, profesor, Piatra Neamț

E : 9267. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}.$$

Paulina Burtea, profesoară, Motru, Gorj

E : 9268*. Să se determine forma generală a numerelor naturale n astfel încît $n^2 + n + 1 : 3$.

Ion Lupșor, profesor, Borșa, Maramureș

Clasa a VIII-a

E : 9269*. Să se determine numerele întregi x pentru care numărul

$$a = x^8 + 9x^5 + 8x^2$$

este divizibil cu 288.

Gh. Neagu, profesor, Bacău

E : 9270. Dacă $P(X) = X^2 + mX + n$ (m și n reali, distincți și nenuli) și $(X - n) \mid P(X)$, atunci $(X - m) \mid P(X)$ dacă și numai dacă $m = 1$.

Radu Pușcarciuc, profesor, Gh. Gheorghiu-Dej

E : 9271*. Determinați cifrele a, b și c din sistemul zecimal astfel încît:

$$\overline{bc^2} = 1111 \cdot (a + b + c)^3 + \overline{cba^2}.$$

Radu Ghenghiu, profesor, Oradea.

Scanned with OKEN Scanner

E : 9272. Fie patru puncte necoplanare A, B, C, D astfel încît $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $AD \perp AC$ și $AB \equiv AD$.

În cazul cînd $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$ să se calculeze distanța de la A la planul triunghiului BCD.

Secționînd tetraedrul $ABCD$ cu un plan paralel cu planul (BCD) dus la jumătatea înălțimii din A să se afle volumul trunchiului de piramidă format.

Alexandru Toporan, profesor, Orșova

E : 9273. Să se determine toate ecuațiile de gradul al doilea de forma $ax^2 + x + 3 = 0$ cu $a \in \mathbf{R} - \{0\}$, care au ambele rădăcini numere întregi.

V. Țifui, profesor, Piatra Neamț

E : 9274*. Cîte elemente are o mulțime de puncte din plan, cu proprietatea că oricare trei sînt necoliniare și dintre oricare patru, fiecare este ortocentrul triunghiului determinat de celelalte trei?

Alexandru Oțet, profesor, Brașov

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G. : 57. Demonstrați că dacă $\dfrac{2^n - 2}{n}$ este întreg, atunci $\dfrac{2^{2^n-1}-2}{2^n - 1}$ este întreg, $n \in \mathbf{N}^*$.

* * *

O.G. : 58. Între lungimile a și b a două laturi ale unui triunghi și raza R a cercului circumscris există relația :

$$b(a - b) = R^2.$$

Să se calculeze unghiurile triunghiului.

Valentina Cicu, profesoară, Hotarele, Giurgiu

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21233. Fie ABC un triunghi, $A' \in (BC)$ un punct arbitrar, M și N două puncte situate pe paralela dusă prin A la BC, astfel încît $A \in (MN)$. (M și B sînt în același semiplan față de AA'). Notînd $AM \cap AB = \{C'\}$, $A'N \cap AC = \{B'\}$, să se arate că AA', BB', CC' sînt concurente dacă și numai dacă M și N sînt simetrice față de A.

Gh. Szöllösy, profesor, Sighetul-Marmației

Scanned with OKEN Scanner

21241. Să se rezolve ecuația $\left[\frac{C_{3x-3}^{3x-1}}{7}\right] = 0$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului a.

Gh. Neagu, profesor, Bacău

21242. Să se demonstreze inegalitatea:

$$1986 > 10^{\left(\frac{1}{1985}+\frac{1}{1984}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)\cdot\frac{3}{10}}.$$

Viorica Ciorba, elevă, Tîrgu Ocna

21243*. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1+2^x}{3^x} = (1+2^x+4^x)^x.$$

Aurel Ene, student, București

21244. Să se demonstreze că $(\forall)\ a, b \in \mathbf{N}$ astfel încît $1 \leqslant a < b$, există $c \in \mathbf{N}$ astfel încît $a < \ln c < b$.

Florin Rotaru, matematician, Focșani

21245*. Se dă un triunghi ABC și fie punctele $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$. Să se arate că o condiție necesară pentru ca dreptele AM, BN, CP să fie concurente este ca să existe $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$ astfel ca:

$$\alpha \cdot \sigma[ANP] + \beta \cdot \sigma[BPM] + \gamma \cdot \sigma[CMN] = \sigma[MNP].$$

Este această condiție și suficientă?

G. G. Niculescu, profesor, București

21246. Să se rezolve ecuația

$$x^3 - 2(2R - r)x^2 + r(4R - r)x - 4Rr^2 = 0,$$

unde r, R sînt razele cercurilor înscris și circumscris ale triunghiului.

Dan Branișteanu, profesor, Pitești

Clasa a XI-a

21247*. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ definit astfel: $a_1 = 2$, $a_n = \log_n(n+k)$, $(\forall)\ n \geqslant 2$, k fiind un număr real pozitiv fixat. Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și să se determine limita sa.

(În legătură cu problema 5118, R.M.T. 1/1983).

Ion Diaconu, profesor, Piatra Neamț

Scanned with OKEN Scanner

21248. Fie şirurile convergente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\subset\mathbb{R}_+^*$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\subset\mathbb{R}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a>0$ şi σ o permutare oarecare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_1^{b_{\sigma(1)}}\cdot a_2^{b_{\sigma(2)}}\cdots a_n^{b_{\sigma(n)}}} = a^b.$$

Dorinel Anca, profesor, Tîrgovişte

21249. Să se determine n natural aşa încît numărul:

$$N = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n} A_n^k\cdot\left[\frac{x}{k!}\right]$$

să fie pătrat perfect, A_i^j reprezentînd aranjamente de i obiecte luate cîte j, iar $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

Gh. Cauieş matematician, Brăila

21250. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale astfel încît $3a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}a_n + a_n^2 \leq 6$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Să se arate că $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Viorel Vâjâitu şi *Laurenţiu Chirică*, profesori, Sighişoara

21251*. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu

$$x_0 = 1,\ x_1 = k,\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_{n-1}},\ \text{unde } k\geq 2,\ k\in\mathbb{N}.$$

Se cere: a) Formula termenului general al şirului;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Mircea M. Mărculescu, elev, Drăgăşani, Vîlcea

21252. Să se găsească expresia termenului general al şirului de numere reale nenule $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care verifică relaţia de recurenţă

$$2^{\frac{\ln 2e}{\ln 2}\cdot x_n\cdot x_{n-1}} - x_{n-1} = e^{x_{n+1}x_n x_{n-1}},\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*,\ \text{şi}$$

$$x_0 = \frac{\ln 2^5\cdot e^7}{12};\quad x_1 = \frac{5\ln^2 2 + 7}{\ln 2^5 - e^7}.$$

Roxana Paraschiv şi *Iulian Năstac*, elevi, Moineşti

21253*. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale cu $x_0 > 0$ definit prin relaţia $x_{n+1} = \ln(1 + \operatorname{arctg} x_n)$, $n\geq 0$. Să se arate că şirul $(nx_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi are limita egală cu 2.

Mircea Lascu, profesor, Zalău

Clasa a XII-a

21254. Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}\,dx.$

* * *

Scanned with OKEN Scanner

21255. Fie polinomul $f(X) = (r_1 - X)(r_2 - X) \cdot \ldots \cdot (r_n - X) \in \in \mathbf{C}[X]$ și

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_1 & a & a & \ldots & a \\ b & r_2 & a & \ldots & a \\ b & b & r_3 & \ldots & a \\ \vdots & & & & \\ b & b & b & \ldots & r_n \end{vmatrix}.$$

Demonstrați că $\Delta = \begin{cases} \dfrac{af(b) - bf(a)}{a - b}, & \text{dacă } b \neq a \\ f(a) - af'(a), & \text{dacă } b = a. \end{cases}$

C.d.p. de Mitrinovici (Polinoame și matrici)

21256*. Să se calculeze limita șirului:

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{n^k}{k+1} C_n^k}{n^{n-1}}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Gh. Neagu, profesor, Bacău

21257*. Se dă funcția $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arccos \dfrac{x^3 + ax}{2}$, unde $x \in \in \mathbf{R}$, iar D este domeniul maxim de definiție.

1. Să se determine a astfel încît tangenta la graficul funcției în origine să fie paralelă cu dreapta $2y = 3x$.
2. Să se determine primitivele funcției f cu a determinat la punctul 1.
3. Să se calculeze $I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx$ cu a determinat la punctul 1.

Aurel Doboșan, profesor, Lugoj

21258. Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_0^n f(x)\,dx \right)^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbf{N},$$

unde $f : [0, +\infty) \to [a, +\infty)$, $a > 0$, este o funcție continuă pentru care există $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = L$, L finit sau nu.

Iulian Coroian, conf. univ., Baia Mare

21259. Fie ecuația diferențială $y'(x^4 - 5x^2 + 4) - 4xy = 0$ cu $y(0) = \dfrac{1}{4}$. Să se reprezinte grafic $y = f(x)$ și să se determine aria domeniului mărginit de graficul funcției $y = f(x)$ și axa Ox.

Gherhard Servatius, profesor, Codlea

Scanned with OKEN Scanner

Premiul II

Moceanu Mirel Lic. „N. Bălcescu" Craiova

Premiul III

Fărcășanu Octavian Lic. „N. Bălcescu" Craiova

Premiul S.S.M.

Istrate Gabriel Lic. „V. Alecsandri" Galați

Mențiuni

Bunget Mihai Lic. „T. Vladimirescu" Tg. Jiu
Iosif Mihai Lic. „I. L. Caragiale" Ploiești
Iagăru Mihaela Lic. „I. Minulescu" Slatina
Zara Cătălin Lic. „Ștefan cel Mare" Suceava
Guiaș Flavius Lic. „I. Slavici" Arad
Prodan Cristina Mihaela Lic. „I. Creangă" București
Crețu Eugen Gabriel Lic. „Gh. Lazăr" Sibiu
Catrina Florin Lic. „Gh. Murgoci" Brăila
Gramatovici Radu Lic. „I. L. Caragiale" București
Hristeiu Mihaela Lic. „C. D. Loga" Timișoara
Năsturică Cristinel Sebastian Lic. „N. Bălcescu" Craiova
Constantin Adrian Lic. „N. Lenau" Timișoara
Nicolau Dana Lic. mat. fiz. 3 București

Clasa a XII-a

Premiul I

Barcău Alexandru Mugurel Lic. „N. Bălcescu" Craiova
Pop Ciprian Lic. mat. fiz. 1 Timișoara

Premiul II

Stiriu Liviu Cristian Lic. „N. Bălcescu" Pitești

Premiul III

Gheorghiță Victor Lic. mat. fizică Reșița
Mihai Alexandru Ianeu Lic. „I. L. Caragiale" București
Popa Dan Octavian Lic. „N. Bălcescu" București
Popovici Irina Lic. „V. Alecsandri" Galați

Premiul S.S.M.

Beli Nicolae Lic. mat. fizică nr. 1, București
Vornicescu Mihai Lic. mat. fiz. 2 Cluj-Napoca
Joița Cezar Lic. ind. 2 Găești
Andreiu Bogdan Lic. „G. Bacovia" Bacău
Boicu Leonard Lic. „I. Creangă" București
Luca Florian Lic. „V. Alecsandri" Galați

N.R. Premiile I, II, III sînt ale M.E.I. și U.T.C. iar mențiunile sînt ale M.E.I.

CONCURSUL DE INFORMATICĂ, ETAPA FINALĂ, IAȘI, 1987

PREMIANȚII CONCURSULUI

Clasa a IX-a

1. *Gaspar Andrei* — Timișoara — premiul C.C. al U.T.C.
2. *Frîncu Cristian* — București — premiul I
3. *Sultana Răzvan* — Brașov — premiul III
4. *Baltac Bogdan* — București — premiul III

* Clasele a XI-a și a XII-a vor apare în numărul următor.

Scanned with OKEN Scanner

E : 9206. Să se rezolve pe rînd în mulțimea $\mathbf{Z}$, următoarele ecuații :

a) $\left[\frac{3x+1}{2}\right] = \frac{x-2}{2} + x$;

b) $\left[\frac{x+2}{4}\right] - (2x-1) = 1 - \left[\frac{4x-2}{2}\right]$;

unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

Lavinia Păunc, elevă, Pitești

E : 9207*. Să se arate că raza r a cercului înscris în triunghiul ascuțitunghic de laturi a, b, c satisface inegalitatea :

$$3r < \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

Mariana Mirică, profesoară, Costești, Argeș

E : 9208. Să se afle aria patrulaterului care are ca vîrfuri punctele de intersecție ale bisectoarelor unghiurilor unui dreptunghi de dimensiuni a și b, $a > b$.

C. Ionescu-Țiu

E : 9209. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu unghiurile drepte în A, D și $AB + DC = BC$. Să se arate că există un punct M pe latura BC astfel încît $A\widehat{M}D = 90°$.

* * *

E : 9210*. În triunghiul $ABC(\hat{A} = 90°)$, se consideră D piciorul înălțimii din A pe BC și M mijlocul lui BC. Demonstrați că $\frac{S_{AMD}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$ dacă și numai dacă $\hat{C} = 75°$.

Virginia Țică-Diaconu și *Vasile Țică-Diaconu*, profesori, Cîmpulung-Muscel

E : 9211. Un triunghi ABC cu latura $AC = 10$ cm și aria de 75 cm^2 are proprietatea că înălțimea AM ($M \in BC$) determină pe latura BC un segment $CM \equiv MA$. Să se calculeze aria triunghiului AMB.

Aurel Enc, student, București

E : 9212*. În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$), $AC \perp BD$, $AC = MN = a$ unde MN este linie mijlocie. Să se calculeze, în funcție de a, lungimea diagonalei BD și aria trapezului.

Nistor Budescu, profesor, Dalboșeț, Caraș-Severin

Scanned with OKEN Scanner

E : 9226. Există $x, y \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ astfel încît să avem pe rînd :

a) $[x] + [y] = x + y$; b) $[x] - [y] = x - y$;

c) $[x] \cdot [y] = x \cdot y$; d) $\dfrac{[x]}{[y]} = \dfrac{x}{y}$?

(S-a notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului rațional a).

Liviu Pîrșan

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G. : 51. Fie mulțimea $A = \{8888 \cdot n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Să se determine cel mai mic element al mulțimii A care are toate cifrele distincte între ele.

Emil C. Popa, profesor, Sibiu

O.G. : 52. Demonstrați că ecuația :

$$2x^3 + 2y^3 = u^4 - v^4$$

admite o infinitate de soluții de forma (x_0, y_0, u_0, v_0) unde $x_0, y_0, u_0, v_0 \in \mathbf{N}$.

(Matematyka, Polonia, 1981)

O.G. : 53. Să se arate că într-un triunghi ascuțitunghic oarecare ABC există relația

$$6h_a + 4a \leqslant 5(b + c).$$

V. Cîrtoaje, Ploiești

O.G. : 54. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1. Considerăm punctele $M \in (BC)$, $N \in (CD)$ astfel încît : $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{CN}{ND} = m$, $(m > 0)$. Notăm cu P intersecția dreptelor AM și BN. Demonstrați că : $DP = 1 \Leftrightarrow m = 1$.

Liviu Pîrșan

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 20813* (G. M. 7/1986, pag. 261).

Dacă $x^3 + y^3 > 4$ și $y^3 + x^3 > 4$ să se arate că $x + y > 1$.

L. Panaitopol

Soluția autorului. Avem de studiat mai multe cazuri.

1) $x < 0$ și $y < 0$. Atunci din $x^3 + y^3 > 4$, deoarece $x^3 < 0$ rezultă $y^3 > 4$, deci $y < -2$. Analog obținem că $x < -2$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte din $x^3 + y^2 > 4 \Rightarrow y^2 > 4 - x^3 > -x^3$, deci $y^2 > -x^3$, (1).

Din $y^3 + x^2 > 4$ rezultă analog că $x^2 > -y^3$, (2). Din (1) și (2) rezultă că $x^2y^2 > x^3y^3$, deoarece $-x^3 > 0$ și $-y^3 > 0$. Deci $xy < 1$, contradicție cu faptul că $x < -2$ și $y < -2$.

2) $x > 0$ și $y < 0$. (Cazul $y > 0$ și $x < 0$ se tratează identic deoarece prin schimbarea rolurilor lui x și y obținem aceeași inegalitate din ipoteza problemei). Notăm $y = -z$, cu $z > 0$. Atunci

$$y^3 + x^2 > 4 \Leftrightarrow x^2 - z^3 > 4 \Rightarrow x^2 > z^3 + 4 \Leftrightarrow x > \sqrt{z^3 + 4}, \text{ deoarece } x > 0.$$

Rezultă că $x + y = x - z > \sqrt{z^3 + 4} - z$. Este suficient să arătăm că $\sqrt{z^3 + 4} - z > 1$, pentru $z > 0$. Dar

$$\sqrt{z^3 + 4} - z > 1 \Leftrightarrow z^3 + 4 > z^2 + 2z + 1 \Leftrightarrow z^3 - z^2 - 2z + 3 > 0, \qquad (3)$$

Dacă $z \geq 2$, atunci $z^2 - z - 2 \geq 0$, deci $z(z^2 - z - 2) + 3 > 0$, adică inegalitatea (3) este adevărată.

Dacă $z \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, atunci $z - 1 > 0$, $\frac{3}{2} - z > 0$, deci $z^2(z-1) + 2\left(\frac{3}{2} - z\right) > 0$, deci din nou (3) este adevărată.

Dacă $z \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, atunci $z^2(z-1) + 3 > \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} + 3 > 4$, deci $z^2(z-1) + 3 - 2z > 4 - 2z > 0$, deci (3) adevărată.

Dacă $z \in (0, 1)$ atunci $z^3 + (1 - z^2) + 2(1 - z) > 0$, deci inegalitatea (3) este adevărată. În concluzie pentru $x > 0$ și $y < 0$, în condițiile ipotezei, avem $x + y > 1$.

3) Dacă $x > 0$ și $y > 0$ nu putem avea simultan $x < 1$ și $y < 1$ căci atunci $x^3 + y^2 < 1$, absurd, conform ipotezei. Deci sau $x > 1$ sau $y > 1$, deci în ambele cazuri avem $x + y > 1$.

Problema 20844* (G.M. 8/1986, pag. 314).

În triunghiul ABC mediana AA', $A' \in (BC)$ și bisectoarea BB', $B' \in (AC)$ se intersectează în punctul M. Dreapta CM intersectează latura AB în C'. Să se arate că:

$$\frac{BC}{B'C'} - \frac{B'C'}{AC'} = 1.$$

Ioan Ani, profesor, Năsăud

Soluție. Aplicînd teorema lui *Ceva* în triunghiul ABC obținem

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = 1, \text{ deci } \frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'C} \cdot (1), \text{ deoarece } \frac{A'B}{A'C} = 1.$$

Din relația (1), conform reciprocei teoremei lui *Thales*, rezultă că $B'C' \parallel BC$ și $\widehat{C'B'B} \equiv \widehat{B'BC}$. Dar $\widehat{B'BC} \equiv \widehat{B'BC'}$, (din ipoteză), deci $\widehat{C'B'B} \equiv \widehat{B'BC'}$. Rezultă că triunghiul $BB'C'$ este isoscel, deci $(B'C') \equiv (BC')$, (2).

Aplicînd teorema bisectoarei în triunghiul ABC obținem $\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{BC}$, (3).

Din relațiile (1) și (3) rezultă că $\frac{AB}{BC} = \frac{AC'}{BC'}$, deci

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{BC}{BC'} \Leftrightarrow \frac{AC' + C'B}{AC'} = \frac{BC}{BC'} \Leftrightarrow 1 + \frac{C'B}{AC'} = \frac{BC}{BC'} \Leftrightarrow \frac{BC}{BC'} - \frac{C'B}{AC'} = 1.$$

Din ultima relație și din relația (2) rezultă $\frac{BC}{B'C'} - \frac{B'C'}{AC'} = 1$, ceea ce trebuia arătat.

Soluție bună au dat: *Popa Elena*, cl. a IX-a, Lic. „G. Bacovia" Bacău; *Satnoianu Gigi*, cl. a IX-a, Lic. ind. 5 Brăila.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a

Problema 20767* (G.M. 5/1986, pag. 168).

Să se arate că numărul $C_{3p}^{p} - 3$ *se divide la* p^2, p *fiind un număr prim.*

Florin Rotaru, matematician, Focșani

Soluție. Folosim relația $C_{n+m}^{k} = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0$, (1).

Pentru $n = p$, $m = 2p$ și $k = p$ relația (1) devine:

$$C_{3p}^{p} = C_p^0 C_{2p}^{p} + C_p^1 C_{2p}^{p-1} + C_p^2 C_{2p}^{p-2} + \ldots + C_p^p C_{2p}^0$$

de unde

$$C_{3p}^{p} = C_{2p}^{p} + C_p^1 C_{2p}^{p-1} + C_p^2 C_{2p}^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} C_{2p}^1 + 1$$

deci

$$C_{3p}^{p} - 3 = C_{2p}^{p} - 2 + C_p^1 C_{2p}^{p-1} + C_p^2 C_{2p}^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} C_{2p}^1, \quad (2).$$

Pentru $(\forall)\ 1 \leqslant k \leqslant p-1$, C_p^k se divide cu p, unde p este număr prim. Trebuie să arătăm că și C_{2p}^k se divide cu p, $(\forall)\ 1 \leqslant k \leqslant p-1$, și că numărul $C_{2p}^{p} - 2$ se divide cu p^2.

Avem succesiv:

$$C_{2p}^{k} = \frac{(2p)!}{k!(2p-k)!} \Rightarrow k!\, C_{2p}^{k} = 2p\,(2p-1)\cdot\ldots\cdot(2p-k+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k!\, C_{2p}^{k}}{p} = 2\,(2p-1)\cdot\ldots\cdot(2p-k+1).$$

Deoarece $k \leqslant p-1$ rezultă că în membrul drept avem un număr natural deci C_{2p}^{k} se divide cu p.

Rămâne de demonstrat că numărul $C_{2p}^{p} - 2$ se divide cu p^2. Făcând $n = m = k = p$ în relația (1) obținem

$$C_{2p}^{p} = (C_p^0)^2 + (C_p^1)^2 + \ldots + (C_p^{p-1})^2 + (C_p^p)^2, \text{ adică}$$

$$C_{2p}^{p} - 2 = (C_p^1)^2 + (C_p^2)^2 + \ldots + (C_p^{p-1})^2;$$

dar C_p^k se divide cu p deci membrul drept se divide cu p^2 deci $C_{2p}^{p} - 2$ se divide cu p^2.

În relația (2), $C_{2p}^{p} - 2$ se divide cu p^2 și suma produselor de combinări se divide cu p^2, atunci și $C_{3p}^{p} - 3$ se divide cu p^2.

Soluție bună au dat: *Ichim Virgiliu*, cl. a V-a, Lic. ind. 4 Brăila; *Podoleanu Daniela*, cl. a X-a, Lic. ind. 3 Bacău.

Problema 20768* (G.M. 5/1986, pag. 168).

Să se rezolve ecuația:

$$\sin x + 8\cos x = 4\sin ax + 7\cos ax,\ a \in \mathbf{R}.$$

Maria Elena Panaitopol, profesoară, București

Soluție. Observăm că $1^2 + 8^2 = 65 = 4^2 + 7^2$ și atunci împărțind ecuația cu $\sqrt{65}$ obținem:

$$\frac{1}{\sqrt{65}}\sin x + \frac{8}{\sqrt{65}}\cos x = \frac{4}{\sqrt{65}}\sin ax + \frac{7}{\sqrt{65}}\cos ax, \quad (1).$$

Notăm $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{65}}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin\beta = \frac{4}{\sqrt{65}}$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, de unde

$\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{65}}$ și $\cos\beta = \frac{7}{\sqrt{65}}$. Vom obține $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$ și $\beta = \operatorname{arctg}\frac{4}{7}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația (1) devine $\cos(x-\alpha)=\cos(\alpha x-\beta)$ cu soluția

$$x-\alpha\in\{\pm(\alpha x-\beta)+2k\pi\mid k\in\mathbf{Z}\}$$

de unde, pentru $a\neq\pm 1$, obținem

$$x\in\left\{\frac{\alpha-\beta+2k\pi}{1-a}\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\alpha+\beta+2k\pi}{1+a}\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$$

cu α și β desemnați mai sus.

Pentru $a=1$ ecuația devine: $3\sin x=\cos x$ de unde $\operatorname{tg}x=\frac{1}{3}$ cu soluția $x\in\left\{k\pi+\right.$ $\left.+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

Pentru $a=-1$ ecuația devine $5\sin x=-\cos x$ de unde $\operatorname{tg}x=-\frac{1}{5}$ cu soluția $x\in$ $\in\left\{k\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

Soluție bună au dat: *Udrea Călin*, cl. a X-a, Lic. „N. Bălcescu" Pitești; *Safta Cosmin*, cl. a X-a, Lic. mat. fiz. 1 București.

Clasa a XI-a

Problema 20830* (G.M. 7/1986, pag. 264).

Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea că $|f(x)|\leqslant x^2$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$. Să se demonstreze că dacă $P\in\mathbf{R}[X]$ este un polinom de grad impar cu coeficienți nenuli iar $a, b\in\mathbf{R}$, atunci funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=a\cdot f(P(x))f'(x)+b\cdot f(x)f'(P(x))$, nu este injectivă.

Dan Seclăman, profesor, Craiova

Soluție. Din $P\in\mathbf{R}[X]$ polinom de grad impar cu coeficienți nenuli rezultă că există cel puțin un $x_0\in\mathbf{R}$, $(x_0\neq 0)$ astfel încît $P(x_0)=0$.

Din $|f(x)|\leqslant x^2$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$, rezultă că, în particular, $|f(0)|\leqslant 0\Rightarrow f(0)=0$. În continuare, din $f(0)=0$ și f derivabilă rezultă că

$$|f'(0)|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^2}{x}\right|=\lim_{x\to 0}|x|=0.\ \text{Deci}\ |f'(0)|\leqslant 0\Rightarrow|f'(0)|=0\Rightarrow f'(0)=0.$$

Acum, considerînd acel $x_0\in\mathbf{R}$ din primul paragraf al soluției ($x_0\neq 0$ și $P(x_0)=0$) să calculăm conform enunțului numerele reale $g(0)$ și $g(x_0)$.

$$g(0)=a\cdot f(P(0))\cdot f'(0)+b\cdot f(0)\cdot f'(P(0))=a\cdot f(P(0))\cdot 0+b\cdot 0\cdot f'(P(0))=0.$$

$$g(x_0)=a\cdot f(P(x_0))\cdot f'(x_0)+b\cdot f(x_0)\cdot f'(0)=a\cdot f(0)\cdot f'(x_0)+b\cdot f(x_0)\cdot f'(0)=$$

$$=a\cdot 0\cdot f(x_0)+b\cdot f(x_0)\cdot 0=0.$$

Deci din $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $0, x_0\in\mathbf{R}$ și $x_0\neq 0$ rezultă $g(0)=g(x_0)=0$, deci g nu este injectivă.

Soluție bună au dat: *Munteanu Norocel*, cl. a XI-a, Lic. ind. 2 Alexandria; *Gerea Iuliana*, cl. a XI-a, Lic. ind. 5 Brăila.

Problema 20859* (G.M. 8/1986, pag. 316).

Într-un sistem de coordonate xOy se consideră punctele $A(f_n, f_{n+1})$, $B(f_{n+3}, f_{n+4})$, $C(f_{n+5}, f_{n+6})$, unde $f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+6}$ sînt termeni consecutivi ai șirului lui Fibonacci,

$$f_0=0,\ f_1=1,\ f_{n+2}=f_{n+1}+f_n,\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}.$$

Să se arate că aria triunghiului ABC este independentă de n.

Petre Ortoanu, profesor, Beclean, Bistrița-Năsăud

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Aria triunghiului ABC este dată de formula $\sigma[ABC] = |d|$ unde

$$d = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} f_n & f_{n+1} & 1 \\ f_{n+2} & f_{n+3} & 1 \\ f_{n+4} & f_{n+5} & 1 \end{vmatrix}$$

Avem $d = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} f_n & f_{n+1} & 1 \\ f_{n+2} - f_n & f_{n+3} - f_{n+1} & 0 \\ f_{n+4} - f_n & f_{n+5} - f_{n+1} & 0 \end{vmatrix} =$

$$= \frac{1}{2}\left[(f_{n+2} - f_n)(f_{n+5} - f_{n+1}) - (f_{n+3} - f_{n+1})(f_{n+4} - f_n)\right].$$

Folosind relația din ipoteză, care definește șirul recurent $(f_n)_{n\geqslant 0}$, obținem $d = \frac{1}{2}(f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+2})$.

Considerînd șirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dat de relația $x_n = f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+2}$, se observă că $x_0 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, etc. Se arată ușor, prin inducție, că $x_n = (-1)^{n+1}$, $(\forall)\ n \geqslant 0$. Deci $d = \frac{(-1)^{n+1}}{2}$. Rezultă că $\sigma[ABC] = |d| = \frac{1}{2}$, deci aria triunghiului ABC este independentă de n.

Soluție bună au dat: *Catrina Florin*, cl. a XI-a, Lic. „Gh. Murgoci" Brăila; *Stănică Daniel*, cl. a XI-a, Lic. ind. 3 Cîmpulung Muscel.

Clasa a XII-a

Problema 20836 (G.M. 7/1986, pag. 265).
Să se arate că funcția

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

nu admite primitive pe $\mathbf{R}$.

Constantin Stan, profesor, Brăila

Soluție. Deoarece pentru $x \neq 0$ avem egalitatea

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \left(x \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' + \frac{x}{1+x^2}$$

rezultă că

$$\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Dacă f ar admite primitive pe $\mathbf{R}$, atunci o primitivă a sa ar fi de forma:

$$F(x) = \begin{cases} x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1, & x<0 \\ x + C_2, & x\geqslant 0. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Punînd condiția ca F să fie continuă în $x_0 = 0$ rezultă $C_1 = C_2 = C$ deci

$$F(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C, & x < 0 \\ x + C, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Pe de altă parte funcția

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln (1 + x^2)}{2x}, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

nu are limită în x_0 deoarece

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = -\frac{\pi}{2} \text{ și } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1.$$

Deci funcția F nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

Presupunerea făcută este deci falsă, de unde rezultă că f nu admite primitive pe $\mathbf{R}$.

Soluție bună au dat: *Tuță Diana*, cl. a XII-a, Lic. „Vlaicu Vodă" Curtea de Argeș; *Castură Cristina*, cl. a XII-a, Lic. ind. 4 „G. M. Murgoci" Brăila.

Problema 20838* (G.M. 7/1986, pag. 265).

Se dau funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ unde $f(x) = x^2 + 1$ și $g(x) = -x^5 + ax^3 + bx + c$ cu $a < 0$, $b < 0$ și $c \in \mathbf{R}$.

Determinați numărul de rădăcini reale ale ecuației:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x).$$

Liviu Pîrșan

Soluție. Avem $f(x) > x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, (1).

Pe de altă parte $g'(x) = -5x^4 + 3ax^2 + b < 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, deci g este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$. Punînd în (1) $x \to g(x)$ rezultă $(f \circ g)(x) > g(x)$, (2). Din inegalitatea (1) și din monotonia lui g rezultă $g(x) > g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, (3). Din (2) și (3) rezultă că $(f \circ g)(x) > (g \circ f)(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Deci ecuația din enunț $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ nu are rădăcini reale.

Soluție bună au dat: *Bănică Bogdan*, cl. a XII-a, Lic. „D. Cantemir" București.

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21149*. Fie numărul rațional

$$x_n = \frac{7n^2 + 14n + 6}{n!}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

i) Să se precizeze valorile lui n pentru care x_n este o fracție zecimală periodică mixtă cu perioadă nenulă;

ii) Să se dea o formulă de calcul pentru numărul de cifre de la partea neperiodică a numărului x_n.

D. Acu, lector univ., Sibiu

Scanned with OKEN Scanner

21150. Notăm m_a, s_a lungimea medianei, respectiv lungimea simedianei corespunzătoare laturii a în triunghiului ABC. Arătați că:

$$m_a + m_b + m_c + 2 \min(a, b, c) \leq s_a + s_b + s_c + 2 \max(a, b, c).$$

Gh. Stoica, București

21151*. Determinați numerele întregi m și n astfel încît

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}.$$

I. Safta, profesor, Pitești

21152. Fie E și P proiecțiile vîrfului B al triunghiului ABC pe tangenta în A la cercul circumscris triunghiului și pe latura AC, respectiv F și Q proiecțiile vîrfului C pe aceeași tangentă și pe latura AB. I fiind proiecția lui A pe BC și D piciorul bisectoarei duse din A, să se arate că:

a) $IF \parallel AB$, $IE \parallel AC$;

b) $IC \cdot IB = AE \cdot AF$; $BE \cdot CF = AI^2$;

c) $\dfrac{PD^2}{QD^2} = \dfrac{AI^2 + AE^2}{AI^2 + AF^2}$.

Laura Constantinescu, profesoară, Sibiu

21153*. Dacă $a, b, c, m \in \mathbb{R}_+^*$, să se demonstreze inegalitatea:

$$a^m(2a - b - c) + b^m(2b - c - a) + c^m(2c - a - b) \geq 0.$$

(O generalizare a unei probleme de la Concursul de matematică — etapa pe țară, 1985).

V. Cîrtoaje, Ploiești

21154. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2, & \text{dacă } x \leq -2 \\ (3 - a)x - 1, & \text{dacă } x > -2. \end{cases}$$

a) Să se explicitezе funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(1 - x)$.

b) Pentru ce valori ale parametrului a funcția g este strict descrescătoare?

Cristina Rădulescu, profesoară, Caracal

21155*. Fie A_1, B_1, C_1 proiecțiile unui punct H din interiorul triunghiului ascuțitunghic ABC pe laturile BC, AC, respectiv AB. Să se arate că H este ortocentru dacă și numai dacă $\widehat{B_1HC_1} \equiv \widehat{BHC}$ și $\widehat{A_1HC_1} \equiv \widehat{AHC}$.

Valentina Blendea și *Gheorghe Blendea*, profesori, Iași

21156*. În triunghiul ABC considerăm punctul $M \in \text{Int } ABC$ și notăm cu E, F intersecțiile dreptelor BM, respectiv CM cu laturile opuse.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $P \in (AB)$ și $Q \in (AC)$. Să se demonstreze că $M \in PQ$ dacă și numai dacă $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{PB}{PA} + \frac{EA}{EC} \cdot \frac{QC}{QA} = 1$.

Vasile Berghea, profesor, Avrig

21157. În triunghiul ABC, fie (BO) mediana corespunzătoare laturii (AC). Fie $M \in (BO)$ astfel încît $\frac{BM}{MO} = \frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbf{R}, n \neq 0$ și fie $\{N\} = AM \cap BC$. Să se calculeze $\frac{\sigma(ABN)}{\sigma(ANC)}$.
(O generalizare a problemei nr. 1003 din revista Kvant nr. 1/1987).

C. Dragomir, profesor, Săpata de Sus, Argeș

21158. Să se arate că un triunghi dreptunghic este isoscel dacă și numai dacă $R = r(1 + \sqrt{2})$, unde r și R sînt raza cercului înscris și respectiv raza cercului circumscris triunghiului.

Nistor Budescu, profesor, Dalboșeț, Caraș-Severin

21159*. Fie $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{a}(-a+b+c)^3 + \frac{1}{b}(a-b+c)^3 + \frac{1}{c}(a+b-c)^3 \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

Gh. Marghescu, București

21160. Să se determine maximul funcției $f : (0, 1) \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

I. Ursu, profesor, Motru, Gorj

21161. Fie P, R și Q punctele de tangență ale cercului înscris triunghiului ABC cu laturile BC, AB și respectiv AC. Prin A ducem $d \parallel BC$ și notăm $PR \cap d = \{E\}$ și $PQ \cap d = \{F\}$. Să se arate că FR și EQ se taie pe cercul circumscris triunghiului PRQ.

Bogdan Suceavă și *Radu Gramatovici*, elevi, București

21162. Să se compare numerele $\sin(\sin x)$ și $\cos(\cos x)$, unde $x \in \mathbf{R}$.

Aurel Doboșan, profesor, Lugoj

Clasa a X-a

21163*. Să se demonstreze că:

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n+1} < 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n}.$$

I. Cucurezeanu, Constanța

21164*. Fie $a, b, c, d \geqslant 0$. Să se arate că

$$\sqrt{a+b+c+d} + \sqrt{b+c+d} + \sqrt{c+d} + \sqrt{d} \geqslant \sqrt{a+4b+9c+16d}.$$

Mihaela Predescu, profesoară, Pitești

21165. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC există dubla inegalitate:

$$18Rr \leqslant ab + bc + ac \leqslant \frac{4}{3}p^2,$$

notațiile fiind cele obișnuite.
(În legătură cu problema O : 490 din G.M. nr. 9/1986, pag. 365).

Mihai Bogdan, profesor, Cosmești, Telcorman

21166. Să se arate că:

a) $\sum_{m=0}^{n} \sum_{p=0}^{m} (-1)^p C_{2n}^{2m} C_m^p = 1, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$

b) $\sum_{m=0}^{n} \sum_{p=0}^{m} \sum_{k=0}^{p} (-1)^p C_{2n}^{2m} C_m^p C_p^k = 0, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$ impar.

Ionel Gh. Tudor, profesor, Călugăreni, Giurgiu

21167. Arătați că există un unic $x \in \mathbf{Q}$ astfel încît $x^3 = 3^x$.

Vilia Banță, profesoară, Gălbinași, Călărași

21168. Să se rezolve în $\mathbf{R}^3$ sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{5(x^2+1)}{x} = \dfrac{6(y^2+1)}{y} = \dfrac{7(z^2+1)}{z} \\ xy + yz + zx = 1. \end{cases}$$

Gh. Szöllösy, profesor, Sighetu Marmației

21169. Să se arate că dacă $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| > 0$, atunci numărul

$$E(z_1, z_2, \ldots, z_n) =$$

$$\frac{(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)(z_1 z_2 \ldots z_{n-1} + \ldots + z_2 z_3 \ldots z_n)}{(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n)(z_1 z_2 \ldots z_{n-2} + \ldots + z_3 z_4 \ldots z_n)}$$

ia numai valori reale.

D. Acu, lector univ, Sibiu

21170*. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = a^x b^{c-x} + a^{c-x} b^x$ cu $a, b \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, $a \neq b$, $c \in \mathbf{R}$.

1) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, \frac{c}{2}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[\frac{c}{2}, \infty\right)$.

2) Să se determine valorile parametrului real m astfel încît $a^{2x} b^c + a^c b^{2x} \geqslant m\, a^x b^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Gh. Micluescu, profesor, Tîrgoviște

21171. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$. Arătați că:

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2 + z_3| \\ |z_2| = |z_3 + z_1| \\ |z_3| = |z_1 + z_2| \end{cases} \Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

Gh. Stoica, București

21172. Să se rezolve în $\mathbf{C}$, ecuația:

$$x^{96} + 2^{192} + 1 = \left(\sqrt{8 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}} + i\sqrt{8 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}\right)^{96}.$$

Cezar Ozunu, profesor, Dănești, Dolj

21173*. Să se afle numerele întregi x cu proprietatea că $x + [\sqrt{x}]$ este pătrat perfect.

Bogdan Suceavă, elev, București

21174. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{s_a} + \frac{1}{m_a} \leqslant \frac{2}{i_a},$$

notațiile fiind cele obișnuite.

Cristian Breazu, student, București

21175*. Se știe că fiind dat un triunghi echilateral ABC și M un punct arbitrar în spațiu, cu segmentele (MA), (MB) și (MC) se poate construi un triunghi, pe care îl vom numi triunghi al lui *Pompeiu*. Să se găsească locul geometric al punctelor M din spațiu pentru care triunghiul lui *Pompeiu* este: a) dreptunghic; b) ascuțitunghic; c) degenerat; d) obtuzunghic.

Vasile Berghea, profesor, Avrig

21176*. Demonstrați inegalitatea:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n - (\sqrt{ab})^n \geqslant \left(\frac{a^n - b^n}{2^n}\right)^2,$$

unde $a, b > 0$ și $n \in \mathbf{N}$.

D. P. Mavlo, Moscova, U.R.S.S.

Clasa a XI-a

21177*. Rezolvați în $\mathbf{R}^n$ sistemul:

$$x_1 + |a_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n| = x_2,$$
$$x_2 + |x_1 + a_2 + x_3 + \ldots + x_n| = x_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{n-1} + |x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + a_{n-1} + x_n| = x_n,$$

$$x_n + |x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + a_n| = x_1,$$

($a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt constante reale).

Liviu Pîrșan

21178. Fie A o matrice pătrată de ordinul trei, ale cărei elemente sînt 0 și 1. Să se determine valoarea maximă pe care o poate lua $\det A$.

* * *

21179. Fie un triunghi ABC și cercurile construite pe laturile AB, BC, CA ca diametri. Să se arate că centrul radical al celor trei cercuri este ortocentrul triunghiului ABC.

* * *

21180*. Considerăm șirul (x_n) dat de

$$x_n = a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}},$$

unde $a > 0$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)$.

* * *

21181. Se dă $\sigma \in S_{10}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 10 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Să se descompună în produs de transpoziții.

b) Să se determine $k \in \mathbb{N}^*$ minim pentru care $\sigma^k = e$, unde e este permutarea identică din S_{10}.

Aurel Doboșan, profesor, Lugoj

21182*. Arătați că nu există trei permutări x, y, z de grad 7 care să îndeplinească condiția:

$$xy = yz = zx = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 1 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gh. Pîrșcu, elev, Rm. Vîlcea

21183. Fie șirul $(b_n)_{n\geq 3}$, unde b_n reprezintă numărul soluțiilor distincte în $\mathbb{R}^n$ ale sistemului:

$$2x_1 + x_1^2 x_2 = x_2;\ 2x_2 + x_2^2 x_3 = x_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$2x_{n-1} + x_{n-1}^2 x_1 = x_n;\ 2x_n + x_n^2 x_1 = x_1.$$

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{1}{1 + b_k}$.

Sorin Simion, profesor, Pitești

Scanned with OKEN Scanner

21184*. Să se afle limita şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de

$$a_n = \frac{[\sqrt{1}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{5}] + \ldots + [\sqrt{4n^2+4n-1}]}{n^3}$$

Cornelia Neagu, profesoară, Bucureşti

21185. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ cu proprietăţile :

i) f bijectivă şi monoton crescătoare ;

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{f(x)} = 0$.

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$.

Doru Isac, profesor, Sibiu

21186*. Să se determine funcţiile continue

$f: (0, \infty) \to (0, \infty)$ cu proprietatea :

$f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x)$, $(\forall)$ $x, y \in (0, \infty)$.

Viorel Bândilă, profesor, Bucureşti

21187. Fie a, b, c numere reale astfel încît

$5(a+b+c) + 3 \min(a, b, c) \geqslant 0$.

Să se demonstreze inegalitatea :

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

V. Cîrtoaje, inginer, Ploieşti

21188. Fie $0 < a < b$, $a, b \in \mathbf{R}$ şi $f: [a, b] \to [a, b]$ o funcţie cu proprietăţile :

1) f convexă şi 2) $f(a) = a$, $f(b) = b$.

Să se arate că pentru fiecare $\lambda \in [2a, 2b]$ ecuaţia $x + f(x) = \lambda$ are soluţiile în $\mathbf{R}$.

Cornel B. Bolovan, profesor, Coltești, Vîlcea

21189. Să se calculeze :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\ln\left(2n\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)\right)\right)^n.$$

Viorel Bândilă, profesor, Bucureşti

21190*. Fie ABC un triunghi, O centrul cercului circumscris şi G centrul de greutate. În O se duce o perpendiculară pe OG care taie cercul în P şi R. Să se arate că $\cos \widehat{AOP} + \cos \widehat{POB} + \cos \widehat{POC} = 0$.

Mihalea Predescu, profesoară, Piteşti

Scanned with OKEN Scanner

21191. Fie $\mathscr{L}$ mulțimea funcțiilor afine f cu coeficienți reali și care sînt definite pentru orice $x \in \mathbb{R}$, date de egalitatea $f(x) = ax + b$ (a, b sînt constante reale, $a \neq 0$). Definim pe $\mathscr{L}$ adunarea și înmulțirea:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); \quad (fg)(x) = (f \circ g)(x).$$

1. Demonstrați că $\mathscr{L}$ este grup abelian față de adunare.
2. Demonstrați că înmulțirea în $\mathscr{L}$ este asociativă dar nu este comutativă.
3. $\mathscr{L}$ cu adunarea și înmulțirea este inel?

* * *

21192*. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și fie $Z(A) = \{x \in A \mid xy = yx \text{ pentru orice } y \in A\}$.

a) Să se arate că $Z(A)$ este un subinel al lui A ($Z(A)$ se numește centrul lui A).

b) Dacă $x^2 - x \in Z(A)$ pentru orice $x \in A$ să se arate că inelul A este comutativ.

* * *

21193. Să se arate că grupul $(\mathbb{Q}, +)$ este izomorf cu grupul endomorfismelor sale.

* * *

21194*. Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ și

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\alpha - \cos x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} \, dx.$$

Calculați $I(\alpha)$.

* * *

21195. Să se determine numărul structurilor de inel, neizomorfe, care pot fi definite pe o mulțime cu un număr prim de elemente.

* * *

21196. Fie $I(a, b) = \int_a^b \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}} \, dx$.

1. Arătați că $I(a, b) = I(-b, -a)$ și dacă a și b sînt de același semn atunci $I(a, b) = I\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$.

2. Stabiliți că $I\left(a, \frac{1}{a}\right) = 0$.

3. Calculați $I(a, b)$.

* * *

21197*. Fie $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) \, dx$.

Scanned with OKEN Scanner

1. Calculați I_0 și I_1.
2. Stabiliți o relație de recurență între I_{n+2} și I_n.
3. Calculați I_4.

* * *

21198. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît să avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) - n\ln n + an + b\right) = 0.$$

Marcel Chiriță, profesor, București

21199. Dacă $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ sînt rădăcinile de ordinul n ale unității, diferite de 1, să se arate că:

a) $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{l+kz_i}{1-z_i} = (l-k)\cdot\frac{n-1}{2}$;

b) $\prod_{i=1}^{n-1}\frac{l+kz_i}{1-z_i} = \frac{l^n+(-1)^{n-1}\cdot k^n}{n(l+k)}$, unde $k, l \in \mathbf{N}^*$.

Leonard Boicu, elev, București

21200. Fie $f:[-1;1]\to\mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă. Să se arate că dacă $f'(-1)\geqslant 0$ și $f''(x)\geqslant 0$ pentru $(\forall)\ x\in[-1;1]$, atunci

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leqslant f(-1)+\int_{0}^{1} f(x)\,dx.$$

C. Sgrăbunță, profesor, Tg. Cărbunești

21201*. Să se calculeze

$$I = \int_0^1 \sqrt{x+\sqrt{x(2-x)}+\sqrt{2}-1}\,dx.$$

Cornel B. Bolovan, profesor, Coltești, Vîlcea

21202*. Dacă $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ este continuă și

$$60\int_0^1 f(x)\,dx = 12a + 15b + 20c + 30d + 60e,$$

atunci există $u\in(0,1)$ așa încît $f(u) = au^4 + bu^3 + cu^2 + du + e$.

D. M. Bătineț u-Giurgiu, profesor, București

21203*. Calculați $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-x+1}}\,dx$.

Călin Burdușel, profesor, Tîrgoviște

Scanned with OKEN Scanner

21204. Fie funcțiile $f, F_1, F_2 : (-1,1) \to \mathbf{R}$ unde $F_1(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, iar $F_2(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

a) Deduceți funcția f știind că F_1 este o primitivă a sa; explicați modul de obținere a lui f.

b) Arătați că F_1 și F_2 sînt egale.

Nicolae Crainic, profesor, Alba Iulia

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M.

O : 518. Să se arate că dacă $x, y \in \mathbf{R}$, $a \in [0, 2\pi]$ și

$$(1 + \sin a)x + (1 - \cos a)y + 1 - \cos a = 0,$$

atunci:

a) $xy + x \in (-\infty, 0]$ și $x^2 + y^2 - 2(x + y) \in [-1, \infty)$;

b) $\dfrac{3 - 2\cos a + \sin a}{\sqrt{3 - 2\cos a + 2\sin a}} \in [1, \sqrt{5}]$.

C. Ionescu-Țiu

O : 519. Fie $a, b \in \mathbf{R}_+$ și $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că:

1) $(a - b)^{2n+1} = a\left(\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} a^{n-k} b^k\right)^2 - b\left(\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} a^{n-k} b^k\right)^2$

2) $(a - b)^{2n} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} a^{n-k} b^k\right)^2 - ab\left(\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1} a^{n-k} b^{k-1}\right)^2$.

Florin Vulpescu-Jalea, profesor, București

O : 520. Triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă pentru orice punct $M \in \operatorname{Int} ABC$, avem:

$$\min\left(m(\widehat{AMB}), m(\widehat{BMC}), m(\widehat{CMA})\right) > \frac{\pi}{3}.$$

Marius Burtea, profesor, Alexandria

O : 521. Fie $M = 2p(p^2 - 3r^2 - 4Rr)$. Să se arate că triunghiul de laturi a, b, c este echilateral dacă și numai dacă

$$\frac{1}{M - a^3} + \frac{1}{M - b^3} + \frac{1}{M - c^3} = \frac{1}{4RS}.$$

Mihai Bencze, profesor, Brașov

O : 522. Fie O centrul sferei înscrise în tetraedrul $ABCD$. Demonstrați că dacă $\sphericalangle ODC = 90°$, atunci planele OBD și OAD sînt perpendiculare.

(Matematika v škole 4/1986, *I. F. Șarîghin*)

O : 523. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale nenule sistemul:

$$\begin{cases} [a, b] + (a, b) = xy \\ [x, y] + (x, y) = ab, \end{cases}$$

unde $[\alpha, \beta] = \text{c.m.m.m.c. } \{\alpha, \beta\}$, iar $(\alpha, \beta) = \text{c.m.m.d.c. } \{\alpha, \beta\}$.

Mircea Lascu, profesor, Zalău

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C : 705. Fie a, b, c trei numere naturale, $m = \text{c.m.m.m.c.}[a, b, c]$, $d_a = \text{c.m.m.d.c.}(b, c)$ și $m_a = \text{c.m.m.m.c.}[a, d_a]$. Se definesc analog m_b și m_c. Să se arate că $\dfrac{m_a m_b m_c}{m}$ este pătrat perfect.

Ion Cucurezeanu, Constanța

C : 706. Să se determine prima zecimală după virgulă a numărului

$$A = \sqrt[3]{n^3 + n^2}, \text{ unde } n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 3.$$

Ion Drobotă, profesor, Bacău

C : 707. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc și M punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD. O dreaptă oarecare care trece prin M taie cercul dat în punctele M_1 și M_2 (M_1 este pe arcul mic AB iar M_2 pe arcul mic CD). Aceeași dreaptă taie a doua oară cercurile circumscrise triunghiurilor ABM și CMD respectiv în punctele N_1 și N_2. Să se arate că $M_1N_1 = M_2N_2$.

(Matematika v škole nr. 3/1986)

C : 708. Fie funcția $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 - 2x\sin z - 4\cos z + 5} + \sqrt{y^2 - 2y\sin z - 6\cos z + 10}.$$

Să se arate că $f(x, y, z) \geqslant 3$. Cînd se atinge egalitatea?

C. Ionescu-Țiu

C : 709. Să se demonstreze că numărul

$$\frac{2k(2k+2)(2k+4)\ldots 4n}{2^{n-2k}(2n-2k+4)\ldots 4n \cdot k(k+1)\ldots(n-k-3)} + 1$$

este natural și pătrat perfect, $(\forall)\ k \in \mathbf{N},\ k \leqslant n$.
(Generalizare la o problemă de concurs din 1985).

Bogdan Romilă, elev, Iași

C : 710. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încît există $a \in \mathbf{Z}^*$ cu proprietățile $f(a) \neq 0$ și $f(f(a)) = a$. Să se arate că există $m, n \in \mathbf{Z}$ astfel ca $f(m)$ divide $f(m+n)$ și $f(n)$ divide $f(m+n)$.

Cristinel Mortici, elev, Găești

C : 711. Fie șirul $(u_n)_{n \geqslant 1}$ dat în modul următor:

$$u_1 = 39,\ u_2 = 45 \text{ și } u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n\ (n \geqslant 1).$$

Să se demonstreze că există o infinitate de termeni ai șirului care se divid cu 1986.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

C: 712. Fie $x \in (6, +\infty)$. Să se arate că există și este unic $n \in \mathbf{N}^*$, astfel ca

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 < \frac{n+1}{12} \cdot x \leqslant 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 - \frac{2n^2 + 5n + 3}{6}$$

și să se afle valorile lui $x \in \mathbf{R}$, pentru care $n = k^m$, $m \geqslant 2$, $m, k \in \mathbf{N}^*$.

V. Chiriac, profesor, Bacău

Clasele a XI-a și a XII-a

C: 713. Fie $p > 2$ un număr prim. Considerăm mulțimile

$G = \{f_{a,b} \mid f_{a,b} : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p,\ f_{a,b}(x) = ax + b,\ \text{unde } a \in \mathbf{Z}_p^*,\ b \in \mathbf{Z}_p\}$;

$G' = \{f_{a^2,b} \mid a \in \mathbf{Z}_p^*,\ b \in \mathbf{Z}_p\}$; $G^2 = \{f_{a,b}^2 \mid a \in \mathbf{Z}_p^*,\ b \in \mathbf{Z}_p\} \cup \{f_{(p-1)^2,b} \mid b \in \mathbf{Z}_p\}$,

unde $f^2 = f \circ f$. Să se demonstreze că:

a) G este grup în raport cu operația de compunere, iar G' este un subgrup al lui G;

b) Care sînt ordinele grupurile G și G'?

c) $G^2 = G'$.

Ion Armeanu, asist. univ., București

C: 714. Fie $M > 0$ și $f : [-M, M] \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu $f(0) = 0$, f'' continuă în 0, $f''(0) \neq 0$. Pentru fiecare $x \in (0, M]$, conform teoremei lui *Lagrange* aplicată funcției f pe intervalele $[-x, 0]$, respectiv $[0, x]$, există $a_x \in (-x, 0)$ și $b_x \in (0, x)$ astfel încît $f(-x) = -xf'(a_x)$ și $f(x) = xf'(b_x)$. Să se demonstreze că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{b_x - a_x}{x} = 1$.

Gh. Stoica, student, București

C: 715. Șirul $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ este definit prin egalitățile $x_1 = a > 0$, $x_2 = b > 0$ și $x_{n+2} = x_{n+1} + \dfrac{1}{x_n}$ pentru orice $n \geqslant 1$.

a) Există numere pozitive a și b pentru care șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este convergent?

b) Arătați că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr natural n cu proprietatea $|\sqrt{x_{n+1}^2 - 2} - \sqrt{x_n^2 - 2}| < \varepsilon$.

Matematika, Sofia 3/1987 (*D. Minkov*)

C: 716. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se rezolve în $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ ecuația:

$X^n = A$, unde $n \in \mathbf{N}^*$, fixat.

Dan Popa, elev, București

Scanned with OKEN Scanner

C : 717. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Să se arate că f este funcție polinomială dacă și numai dacă f este indefinit derivabilă și există $n, m \in \mathbf{N}$, de aceeași paritate, astfel încît funcțiile $f^{(n)}$ și $f^{(m)}$ sînt monotone, avînd monotonie diferită.

Elena Popescu și *Florin Vulpescu-Jalea*, profesori, București

C : 718. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, care satisface recurența $a_{m+n} = \dfrac{a_m + a_n}{1 - a_m \cdot a_n}$, $(\forall)\ m, n \in \mathbf{N}^*$.

Să se arate că dacă șirul este periodic, atunci $a_1 \in \mathbf{R} \to \mathbf{Q}$.

Gheorghe Marchitan, profesor, Suceava

C : 719. Se consideră $I = \left(-\infty, -\dfrac{p+1}{2}\right]$, $p \in \mathbf{N}^*$ fixat și funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = p \cos x + (p-1)\cos 2x + \ldots + 2\cos(p-1)x + \cos px$. Să se arate că orice mulțime $D \subset \mathbf{R}$, pentru care $f(D) \subset I$, este formată numai din puncte izolate.

George-Eugen Müller, cercet. științific, Craiova

C : 729. Se consideră două corpuri finite K și L astfel că există un morfism de corpuri $f : K \to L$ cu proprietatea că pentru orice polinom $a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ ireductibil în inelul $K[X]$, polinomul $f(a_0) + f(a_1)X + \ldots + f(a_n)X^n$ este ireductibil în inelul $L[X]$. Să se demonstreze că cele două corpuri sînt izomorfe.

Marcel Țena, profesor, București

PROBLEME DE INFORMATICĂ

I : 323. Fie x, y numere reale cu $x > 0$. Să se determine n natural astfel încît $nx > y$. (Analiză matematică, cl. a XI-a, pag. 12, ex. 2).

Să se scrie un program pentru citirea parametrilor x, y, pentru determinarea lui n și afișarea rezultatului. Se vor lua în considerație eventualele erori de introducere a datelor afișîndu-se mesajele de eroare.

Silviu Crăciunaș, matematician, C.C.U.B.

I : 324. Considerăm funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 7x & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ și $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \leqslant -2 \\ 2x - 1 & \text{dacă } x > -2. \end{cases}$

(Algebră, cl. a IX-a, pag. 42, ex. 16).

Dacă $V = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un vector de numere reale date, transmise dintr-un program principal, să se scrie o subrutină care să întoarcă programului principal vectorii Y și Z unde $Y(i) = (f \circ g)(x_i)$ și $Z(i) = (g \circ f)(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Silviu Crăciunaș, matematician, C.C.U.B.

I : 325. Să se determine funcția, parametrii de intrare și de ieșire pentru următorul subprogram FORTRAN:

```
      SUBROUTINE W(M, N, K)
      DIMENSION M(*)
      N = 1
      M(N) = 1
      DO 20 I = 1, K
      L = 0
      DO 10 J = 1,N
      LT = 3*M(J)+L
      M(J) = MOD(LT, 10)
   10 L = LT/10
      IF(L.EQ.0)GO TO 20
      N = N+1
      M(N) = L
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Marin Vlada, matematician, București

Scanned with OKEN Scanner

I: 326. Fie $(x_n)_{n\geq p}$, $p \in \mathbf{N}^*$ fixat. Să se alcătuiască un program FORTRAN ce determină limita șirului cunoscînd că satisface relația $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ și (x_p și x_{p+1} sînt dați) $a, b \in \mathbf{R}$.

Liviu Ioniță, student, București

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

SIGHETU MARMAȚIEI (MARAMUREȘ) S. g. 2 cl. V Bancaș Claudia (30), Covaci Gheorghe (60), cl. VII Rus Claudia (30); S.g.3 cl. VI Iepan Lucia (55), Pozdera Milinda (30), Stoica Marius (110); **SIMERIA** (HUNEDOARA) S.g.2 cl. VII Florea Florina (64); **SINAIA** (PRAHOVA) S.g. 2 Izvor cl. VIII Goran Monica (110); **SINGEORGIU** (MUREȘ) S.g. cl. IV Kecskes Gabriela (50); **SINTANA** (ARAD) S.g. 2 cl. V Drip Mărioara (99), Saba Ondina (99); **SLATINA** (OLT) Lic. „I. Minulescu" cl. VI Voiculescu Aurel (70), cl. XI Dianu Cristian Mihail (122); S. g. 2 cl. VI Cîrloganu Cristina (160); S.g.3 cl. VI Rusu Cornelia (70), cl. V Lăcraru Maria (70), Sima Camelia (70); S.g.4 Drăghici Cristian (270); S.g.5 cl. V Baba Simona (50), Crețu Mădălina (45), Ilie Lucica (50), Niță Cristina (49), Burea Sabin (70), Mitu Ruxandr. (60), Stan Marilen Letiția (67), cl. VI Dinică Laurențiu-Dana (247), Barbu Ozana (98), Bola Cristina (110), Dumitru Marian (160), Grigore Elena (80), Ionescu Roxana (110), Negreș Gabriela (120), Petrescu Florentina (91), Stuparu Ana Maria Diana (330), Zamfir Ramona (97), cl. VI Călin Mihaela (100), Căpățînă Gabriela (96), Conea Alina Felicia (75), Delurințu Laura (100), Irimescu Maria (235), Mircea Elena (108), Mitreanu Bogdan (155), Tăcălău Florin (80), cl. VII Constantin Florin Lucian (198), Lăcătușu Violeta (180), Mitu Alin (120), Nica Viorel (140), Brănescu Mihaela (100), Gălușcan Gabriel (180), Nae Anca (90), Bălșanu Mirela Margareta (120), Oancea Cătălina (48), Rusu Silviu (109), Stan Petre (35), Vilcov Iulia (110); S. g. 7 cl. V Suglistu Georgiana (50), Săvescu Andreea (50), Tuțuc Emanuel (70), Achimescu Cristian (90), Pîrvan Cristian (90), Strinoiu Mariana (40), cl. VII Giurescu Remus (420), Teodorescu Virginia (95); S. g. 8 cl. IV Drăghilă Cristian (148), cl. V Griveanu Silvia (98), cl. VI Chimoica Cristian (139). Vișan Rosana (114), Zahalca Daniela (50), cl. VII Nicolescu Adriana Elena (129), cl. VII Pantelie Adriana (97); S.g. 9 cl. V Năstase Adriana (50), Alexandru Diana (168), cl. VI Alesu Lucia (60); S.g.10 cl. V Rădu Mihaela (59); **SMEENI** (BUZĂU) cl. II Stănescu Mihai (83), cl. V Radu M. Valerica (89); **ȘOMCUȚA MARE** (MARAMUREȘ) cl. VI Coteț Adina (84), Cosmuța Cristina (97); Dumuța Gabriela (70); **STOINA** (GORJ) S.g. cl. VII Bărbulescu Claudia (94); **SUCEAVA** (SUCEAVA) S.g.1 cl. VII Dinu Alexandru (83), Poenaru Adriana (85); S.g.2 cl. VI Pitic Mihail-Cătălin (29); S.g.3 cl. VI Hîncu Cezar (171), Moroșan Mihaela (57); S.g.4 cl. V Cușnir Mihaela (60); **SURDUC** (SĂLAJ) cl. VIII Rablău Rodica (100); **ȘIMLEUL SILVANIEI** (SĂLAJ) S.g.2 cl. VI Torje Rodica Maria (90); **ȘTEFĂNEȘTI** (ARGEȘ) S.g.2 cl. VI Mihalache Daniela (81), cl. VII Coman Mariana (99).

TIRGOVIȘTE S.g.2 cl. V Anton Costinel (60), Teleașcă Gabriela (60), Slamnea Andy (39), cl. VI Sîrghe Vlad (54), cl. VII Histor Camelia (33); S.g.5 cl. V Tănase Mihai (297), Poenaru Cristina (60), cl. VI Banea Eduard (47), Banu Viorica (63), Dumitrescu Dana (176), Dobrescu Oana (63), Marinescu Ovidiu (110); S.g.6 cl. V Blidărescu Roxana (140), Bejan Margareta (150), Jenescu Aida (50), Mușat Monica (120), Nastasia Marius (96), Popescu Marius (60), Pătrașcu Viorica (60), Rădulescu Sorina (167), cl. VI Bărăscu Cătălin (95), Fluture Gabriela (120), Mitriță Marcela (226), Martin Eugen (99), Pușcoi Bogdan (125), cl. VII Antofie Adrian (209), Chirilescu Gabriela (80), Ungureanu Alin (109), cl. VIII Anghel Felicia (184); S.g.8 cl. VI Dumitrescu Georgeta (56), cl. VII Teniță Cristian (87); S.g. 11 cl. VI Dănilă Ionuț (70); Lic. „Ienăchiță Văcărescu" Seicărescu Cezarina (89).

VAD (CLUJ) S.g. cl. VI Oltea Dan (97); **VADUL IZEI** (MARAMUREȘ): fără mențiune de școală și clasă: Negrea Petru Ștefan (80); **VADURI** (NEAMȚ) S.g. cl. V Epure Alexandrina (40), cl. VI Atudosei Eugen (29), Ciorobîtcă Gioni (139), Curcan Violeta (35), Ghiureș Domnica (85), Iftimie Valentina (119), Ploscaru Gabriel (120), Rica Alina (182), Ritu Tamara (113), Rusu Lenuța (41), Turcu Mihaela (40), cl. VII Popovici Dan (40); **VALEA DANULUI** (ARGEȘ) S.g. fără mențiune de clasă: Nicolae Gheorghe (80); **VALEA LEURZII** (DÎMBOVIȚA) S.g. cl. VI Toma Rozalia (103); **VASLUI** (VASLUI) S.g. 1 cl. V Fotache Rita (90), cl. VII Costache Maricica (68); S.g.2 cl. V Ciortescu Cezar (75); S.g.3 cl. V Alexandrov Doriana (70), Andrian Cristina (70), Bălăuță Cornel (50), Dascălu Nasilică Daniel (54), Flueraș Gina (63), Ghiur Luciana (40), Gugleș Irina (70), Horduna Adriana (90), Ivan Irina (70), Mihailiuc Simona (80), Onu Dana Claudia (80), Palade Ionuț (54), Stamate Ionela (56), Topală Bianca (30), Zurba Alina (61), cl. VI Săluci Melania (160), cl. VII Hulban Simona (104), Paiu Cecilia (84), Ursache Cornelia (107), Zurba Cătălina (94); S.g.4 cl. V Ghinea Alin (80); S.g.5 cl. VI Solomon Sandu (130), cl. VII Turcanu Nicoleta (110); S.g.6 cl. V Asoltani Monu Alina (80), Cimrianu Crina (72), Grosu

Scanned with OKEN Scanner

Carmen (80), Simbotin Dan (80), Tincă Mihaela Dana (74), cl. VII Darie Adi (99), Drăguț Carmen (110), Florescu Cătălin (109), Lungu Mona (50), Pătrunsu Ionel (222), Picioroagă Viorica (86), cl. VIII Cucu Valentin (78); S.g.8 cl. VI Matei Dorel (113), Nitică Luminița (110), Panaite Marcela (135), Popovici Monica (135). Tibulcă Cezar (312); Lic. mat. fiz. cl. IX Birlădeanu Elena (70), Mitescu Elena (150); **VICTORIA** (BRAȘOV) cl. VII Birsan Ioan (100); **VIDELE** (DÎMBOVIȚA) S.g.1 cl. VII Turoiu Liliana (136); **VIPEREȘTI** (BUZĂU) S.g. cl. VII Mihai Mircea (97); **VIȘEU DE SUS** (MARAMUREȘ) Lic. ind. cl. IX Petran Ramona (142); **VILCEA** fără mențiune de școală cl. V Borza Mihaela (26); **VIRFURI** (DÎMBOVIȚA) S.g.1 cl. V Sebișan Adrian Cristinel (85); **VLAHIȚA** (HARGHITA) S.g.2 cl. VII Kovacs Zoltan (138); **VULCAN** (HUNEDOARA) S.g.4 cl. VI Agapi Cristina (45), Matei Dănuț (51), Paloș Daniela (75); S.g.5 cl. V Tuderan Cosmina (127), Mitrai Leonora (115).

AFUMAȚI (DOLJ) Ș. g. cl. VI Preda Dumitru Felician (100); **APELE** (DOLJ) Ș. g. 1 cl. V Diaconescu Daniel (160); **AZUGA** (PRAHOVA) Ș. g. cl. VII Stanciu Gabriela (125); **BACĂU** (NEAMȚ) Ș. g. 5 cl. VI Axinte Silvia (80); Ș. g. 18 cl. VII Barbu Hortensia (142), Cucu Angela (146), Iordache Sorana (150), Macoviciuc Carina (180), Pușcașu Mariana (100); Lic. ped. cl. V Cincescu Eduard (100); **BAIA MARE** (MARAMUREȘ) Ș. g. 21 cl. VI Silaghi Marius Călin (160); **BĂILEȘTI** (DOLJ) Ș. g. 1 cl. V Ungureanu Traian Adrian (90); **BEIUȘ** (BIHOR) Lic. „S. Vulcan" cl. VIII Leucuța Mioara Daniela (100), Lucan Mariana (120), Lupșa Claudia (66), Memetea Marius (100), Rădulescu Laura (130), Zaha Ema Harta (120); **BOTOȘANI** (BOTOȘANI) Ș. g. 7 cl. VI Balanovici Antonina (130), Huțu Mihaela (100), Mincu Dan Eduard (120); Ș. g. 12 Damian Dan Constantin (50); Lic. ped. cl. V Brînză Gabriel (90), Cișlaru Veronica (89), Irimia Ana (89), Rădulescu Gabriel (57); **BOZOVICI** (CARAȘ SEVERIN) Ș. g. cl. V Găină Cristian (89); **BRAȘOV** (BRAȘOV) Ș. g. 5 cl. V Mailat Radu (40); **BRĂILA** (BRĂILA) Ș. g. 31 cl. V Nelac Cezar (110), Rudicencu Loredana (106), Curecmelis Cătălin (130), cl. VI Paraitescu Claudia (150); Ș. g. „Gemenele" cl. V Ciarel Roxana (79); Lic. ind. 4 „Gh. Murgoci" cl. XI Custură Cristian (295); **BUCUREȘTI** Ș. g. 15 cl. VII Popescu Ioana 100; Ș. g. 56 cl. VI Smărăndoiu Liviu (120); Ș. g. 59 cl. VII Bartulov Bogdan (79); Ș. g. 117 cl. V Dumitrescu Doina (63); Ș. g. 176 cl. VI Bucur Cristina (79), Erustur Valentin (70); **CARACAL** (OLT) Lic ind. 2 cl. XI Turcaș Ana (113); **CĂLĂRAȘI** (CĂLĂRAȘI) Ș. g. 4 cl. V Culea Mariana (168); Ș. g. „Ștefan cel Mare" cl. VI Fianu Leonard (90); **CLUJ-NAPOCA** (CLUJ) Lic. mat. fiz. 2 cl. X Păcurar Radu (10); Lic. arte plast. cl. V Raul Rodilă (90); **CONSTANȚA** (CONSTANȚA) Ș. g. 7 cl. VI Popa Sebastian (120); Ș. g. 29. cl. VIIButănescu Valentin Gheorghe (200); **COSTEȘTI** (ARGEȘ) Ș. g.1cl. V Cirstec Daniel Marian (70), Șerban Ionuț Manuel (70), Sipeteanu Nicoleta (70), Tudor Monica (70), Voinea Ștefan-Florentina(70); **CRAIOVA** (DOLJ) Ș. g. 11 cl. II Pescăruș Iulia (60); Ș. g. 22 cl. VI Cirstea Alina (110), Ilie Adriana (60), Urdea Cornel (90); Ș. g. 32 cl. V Picu Claudiu (100); **CUTEA DE ARGEȘ** (ARGEȘ) Ș. g. 1 cl. VI Smeureanu Ileana (90); **DEJ** (CLUJ) Ș. g. cl. V Timar Adrian (90); Ș. g. 3 cl. VIII Spermezan Adela (100) Feiședi Crina (100); **DOROHOI** (BOTOȘANI Ș. g. cl. V Condrea Cristina-Elena (80); **DROBETA — TR. SEVERIN** (MEHEDINȚI) Ș. g. 2 cl. V Boceanu Ovidiu Răzvan (50), Pirjan Daniel (40); **DRĂGĂNEȘTI** (OLT) Ș. g. 1 cl. V. BărbulescuCostel (70), Suhan Mihaela (90); Toader Cornel (79), Tudorică Maria (66), Pavel Romulus Manuel (105); **FĂLTICENI** (SUCEAVA) Ș. g. 2 cl. V Miuanu Cezara (77); **GALAȚI** (GALAȚI Ș. g.28cl. V. Milos Cristina (100); Ș.g. 42 cl. V. Fientescu Sebastian (80), Chirilă Violeta (160); **HUNEDOARA** (HUNEDOARA(Ș g. 7 cl. V Cojocaru Călina (80); **HUȘI** (VASLUI) Ș. g. 2 cl. VII Mienea Petru (116) Ș. g. 3 cl. V. Birsan Daniela (97), Dodu Nicoleta (68), Graur Irina (69), Ittimoaia Laura (86), cl. VI Dacia Silviu Popa Mihaela (20), Vesely Ana (60), Vlad Gianina (80), Vrabie Laura Cristina (86) cl. VI Dacia Silviu (50), Nicolau Ionel (99), PopaFelix (28); **IACOBENI** (ARAD)Ș. g. cl.V Florea Lavinia (210); **IAȘI** (IAȘI) Ș. g. 3 cl. V Dănică Iuliana (95); Ș. g. 22 cl. V Nistor Corneliu (104); Lic. „G. Ibrăileanu" Ostafi Alina Carmen (90); Lic. „Național" cl. V Ciochină Roxană (89) Livinski Dan Sorin (60), Moisescu Radu Eugen (80), Toma Adrian (70), Vicol Alexandru Valeriu (80), cl. VI Alexandrescu Cristina (40), Beteagu Anca (90), Burnuiană Mihai (90), Căiuianu Călina (270), Căruceru Oreste (100), Harbuz Cristina (170), Heresciu Cristina (130), Mihailovici Livia (140); **LAVRIN** (TIMIȘ) Cercul de matem. cl. V (89); **LELEȘTI** (GORJ) Ș. g. cl VI Petcoiu Alin Alexandru(90); **LUDUȘ** (MUREȘ)Ș.g.2 cl. V Cândea Emilia(89), Miș Dalia(90); **MOLDOVENEȘTI** (CLUJ) Ș. g. cl. VII Șerban Adriana Ileana (80); **MORENI** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. 4 cl. V Dedu Eduard (54); **MURGENI** (VASLUI)Ș.g.cl. VII Gheorghiu Monica (120), Munteanu Nela (50); **ORLEȘTI** (VÎLCEA) Ș. g. cl. VIII Lăzăroiu Daniela (104); **ORȘOVA** (MEHEDINȚI) Ș. g. cl. VI Nanu Minodora (100); **PAȘCANI** (IAȘI) Ș. g. 5 cl. II Filip Constantin Ciprian (80), Bererariu Mihaela (79), Irimia Ionuț (79), Lucescu Adi Cristian (80), Pintilie Adi (79), Rerigo Lucian (79), Tifoi Ingrid Elena (69); **PĂUNEȘTI** (VRANCEA) Ș. g. 10 ani cl. VII Banciu Mihaela (106); **PITEȘTI** (ARGEȘ) Ș. g. 13 cl. VI Cotorgeanu Olimpia (100); Ș. g. 15 cl. V Ștefan Mihaela (30); **PLOIEȘTI** (PRAHOVA) Ș. g. 3 cl. VII Aldea Felicia Otilia (75); Ș. g. 17 cl. V Coamă Daciana (99); Ș. g. 28 cl. VII Ilie Florentin (100); Lic. ped. cl. V Bumbăcea Luciane(110), Loy Gavril (88), Nicolae Andreea (156), Soare Liana (120); **PREDEAL** (BRAȘOV) Lic. cl. VI Pintea Ovidiu (120); **PUCIOASA** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. cl. VI Mihai Monica (120); **RĂDĂUȚI** (SUCEAVA) Ș. g. 3 cl. VI Ciortău Marcluc Sabina (80); **RÎMNICU VÎLCEA** (VÎLCEA) Lic.

Scanned with OKEN Scanner

„N. Bălcescu" cl. VI Bercea Elena Gabriela (50), cl. VI Popescu Ruxandra (92); **ROMAN** (NEAMȚ) Ş. g. cl. I VI Chirilă Remus (100), cl. VII Huțanu Cătălin (130); Ş. g. 11 cl. VI Stoleru Simona (140), Turcu Gabriela (69); **ROȘIA MONTANA** (ALBA) Ş. g. 1 cl. III Mera Nicolae Severian (160); **SEBIȘ** (ARAD) Ş. g. cl. VII Danciu Mihaela (90); **SLATINA** (OLT) Ş. g. 5 cl. VI Manolache Cătălin (120); Ş. g. 7 cl. II Pui Florin (47); **SOMEȘ ODORHEI** (SĂLAJ) Ş. g cl. V Sarca Marius (90); **ȘOTINGA** (DÎMBOVIȚA) Ş. g. 1 cl. V Zegheru Isabela (19); **STOINA** (GORJ) Ş. g. cl. V Gorun Dana Coralia (88); **SUCEAVA** (IAŞI) Ş. g. 2 cl. VII Marcu Ovidiu Marian (190); Ş. g. 4 cl. V Alexa Luminița (80), Ciubotar Marian (90), Coroamă Cezar (100), Croitor Lofedana (80), Donisa Cristina (80), Hatman Cristina (90), Hincu Mirela (90), Lavin Vasile Gabriel (129), Mihalache Oana (100), Mihalache Larisa (60), Motrescu Vasile (125), Nădejde Bogdan (120), Taporeț Angela (100); **TECUCI** (GALAȚI) Ş. g. 2 cl. V Nicu Dan (86), Spînu Anda (29); Ş. g. 5 cl. V Rău Marius (80); **TIMIȘOARA** (TIMIȘ) Ş. g. 24 cl. V Bocșan Gheorghe (50), Miclea Cristina (50), Popa Liana (50); **TORMAC** (TIMIȘ) Ş. g. cl. V Szarvas Enika (80), Toth Iuliana (80); **TURDA** (CLUJ) Ş. g. 8 cl. VI Arion Alina (130), Căpușan Ligia (130); **VADURI** (NEAMȚ) cl. VII Rotaru Mihai (96); **VASLUI** (VASLUI) Ş. g. 6 cl. VIII Arneanu Sorin (110), Neacșu Diana (87), Zurba Anda Raluca Vyky (87); Ş. g. 8 cl. V Sima Daniel (78); **ZAGAR** (MUREȘ) Ş. g. cl. VII Bleahu Anuța (120), Ignat Cosmin (150); Ş. g. 4 cl. V Atodiresei Grațiela (70);

ALBA IULIA (ALBA) Ş. g. 3 cl. VIII Ceteraș Marius (120); **ALMAȘU** (SĂLAJ) Ş. g. cl. VI Ciglenean Claudia (220), Hegheș Gabriela (120); **AMĂRĂȘTI** (VÎLCEA) Ş. g. cl. V Oncescu Marinela (86); **ARAD** (ARAD) Lic. ind. 4 cl. X Sandru Călin (80); **AZUGA** (PRAHOVA) Ş. g. cl. V Aricescu Daniela (60), Dron Cătălin (60), Matei Marian (60), Piciorea Ciprian (60);

BACĂU (BACĂU) Ş. g. 15 cl. VI Agrigoroaie Monica (40); Ş. g. 18 cl. VIII Burghelea Isabela (130); Lic. „G. Bacovia" cl. IX Bălăiță Constantin (24), Gagiu Cornelia (50), Popa Geanina (23), Răchieru Mihaela (96), Zară Lorena Daciana (137); **BAIA MARE** (MARAMUREȘ) Ş. g. 4 cl. V Peter Horațiu Călin (30), cl. VI Zoicaș Mihaela (100), cl. VII Nilaș-Norocel (75); Ş. g. 11 cl. VI Semezeanu Oana (39); **BAND** (MUREȘ) Ş. g. Porav Hodode Anoreea (20); **BEIUȘ** (BIHOR) Ş. g. cl. V Adler Eduard Emil (130); Lic. „S. Vulcan" cl. V Balint Viorica (100), cl. IX Bondor Ioana (111), Zaha Erna (108); **BENTEȘTI** (BIHOR) Ş. g. cl. VII Pojoca Anca Daniela (111); **BLAJ** (ALBA) Lic. ped. „Gh. Șincai" cl. V Maleș Dana (50); **BOBOC** (BUZĂU) Ş. g. cl. VI Drimboceanu Matei (118); **BOTOȘANI** (BOTOȘANI) Ş. g. 7 cl. VI Ochișor Anca Mihaela (126), Palancanu Carmen (130); Ş. g. 8 cl. VI Livanu Daniel (79); Ş. g. 12 cl. VI Andone Cristina (100), Honciuc Grațiela (110), Lișman Marius (100), Ticalo Adriana (104); **BRAȘOV** (BRAȘOV) Ş. g. 5 cl. V Antal Ladislau (100), Dragomir Mariana (76), Gavrilă Oana (80); Hoțaș Cristian Denis (34); Ş. g. 27 cl. VIII Midăuș Roxana (130); **BREZOI** (VÎLCEA) Lic. ind. cl. V Constantinescu Roxana (100), Predescu Andreea (19), Prună Daniela (71); **BUCUREȘTI** Ş. g. 11 cl. VII Popescu Patrick (170); Ş. g. 15 cl. VI Fracsinay Andreea (40), cl. VII Popescu Ioana (250); Ş. g. 17 cl. IV Itoafă Alexandru (190), Itoafă Andreea (211); Ş. g. 50 de mențiune de clasă Tromac Bogdan (71); Ş. g. 56 cl. VI Smărăndoiu Liviu (200); Ş. g. 70 cl. VI Fomin Tamara (110); Ş. g. 134 cl. VII Bastoreanu Elena (150); Ş. g. 146 cl. VIII Rădulescu Mihaela (93); Ş. g. 150 cl. VI Vătășescu Veronica (140); Lic. mat. fiz. 3 cl. IX Feidac Roxana (70); Lic. „N. Bălcescu" cl. XI Jianu Mirela (70); Lic. „I. L. Caragiale" cl. IX Florea Mihai Ionuț (96), Stoica Ancuța (110), Naum Gabriela (48); **BUDA-CORBIȚA VRANCEA** (VRANCEA) Ş. g. cl. VI Ionașcu Lidia (176).

CARACAL (OLT) Ş. g. 2 cl. VII Nica Felicia Mihaela (102); **CARANSEBEȘ** (CARAȘ-SEVERIN) Lic. mat. fiz. cl. IX Mărăgine Antoaneta (130); **CARENIC** (MARAMUREȘ) Ş. g. 2 cl. VI Constantinescu Elena (69); **CĂLĂRAȘI** (CĂLĂRAȘI) Ş. g. 1 cl. VI Rainea Ema (69); Ş. g 4 cl. V Baicu Maria Antoaneta (160), Chiriac Daniela (122), cl. VI Baicu Adina (248); **CÎȘEIU** (CLUJ) Ş. g. cl. VII Prunduș Corina Livia (67); **CERNAVODĂ** (CONSTANȚA) Ş. g. 2 cl. V Carabă Mihaela (80); **CIZER** (SĂLAJ) Ş. g. cl. VI Gudea Nicoleta (75), **CÎMPIA TURZII** (CLUJ) Ş. g. 5 cl. VII Bujor Flaviu (109); **CÎMPINA** (PRAHOVA) Ş. g. 2 cl. V Răileanu Ion (20), cl. VI Joița Mihaela (54), Prăjescu Monica (76), cl. VIII Rus Dan-Alexandru (70), Șoriță Daniela (60); Ş. g. 4 cl. VI Vișan Sorin (80); Ş. g. 8 cl. VII Căciulă Olimpia (270); **CÎMPULUNG MOLDOVENESC** (SUCEAVA) Ş. g. 3 cl. III Petruța Monica (74), cl. V Jora Ioan Ovidiu (40), Sava Mihai (69), Suciaghi Silvia (60), cl. VI Boleca Mihaela (65), Ivănescu Marius (30), Mihalec Marius (69), Radu Daniel (200), Seleiue Mihaela (107); **CÎMPULUNG MUSCEL** (ARGEȘ) Ş. g. 5 cl. VI Ganea Carmen (80), Mihăilă Adrian (108), Peșet Gabriela Andreea (80); Lic. ped. cl. VI Nicolaescu Adrian (120);

CLUJ-NAPOCA (CLUJ) Ş. g. 2 cl. VI Dolean Victoriția (30); Ş. g. 6 cl. IV Pop Codruța Cosmina (254), cl. VI Muntean Leon (75), Netea Ioan-Anton (90), cl. VII Moldovan Mădălina (203), Pintea Bogdan (130), Pop Ana Melania (105), Miclăuș Ioana Virginia (80); Ş. g. 17 cl. VII Vlădău Ioana (95); Lic. arte plast. cl. VI Ivaș Simona (42), cl. VII Chișu Călin (79), Țiț Armand (74). Lic. „A. Barițiu" cl. IX Frențiu Alin Milton (85), Lic. „N. Bălcescu" cl. VI Someșan Călin (60), cl. VII Rotaru Mihai (72), Vele Rozalia Maria (17); **COMIȘANI** (DÎMBOVIȚA) Ş. g. cl. V Tufu Cristian (70), cl. VI Badea Izabela (90); **CONSTANȚA** Ş. g. 16 cl. V

Scanned with OKEN Scanner

Arimit Alexandru (100), Petrică Ileana (79), cl. VIII Bădescu Gabriela (102) : Ş. g. 32 cl. VII Holban Dragoş (50), Constantinescu Milica (53) ; **CORNEŞTI (DÎMBOVIŢA)** Ş. g. cl. VII Stănescu Iulian (27) ; **CRAIOVA** (DOLJ) Ş. g. 2 cl. VII Savin Diana (93) ; Ş. g. 11 cl. VI Cristea Paula (130), Enache Alina Laura (45), Fântâna Emilia (106), Vasile Carmen Lorena (135), Văidianu Anca (80) ; Ş. g. 19 cl. VI Cividjian Andrei (120) ; Ş. g. 21 cl. VI Deselnicu Oana-Alina (134), Mitucă Laura (136) ; Ş. g. 22 cl. V Toba Mihai (100), cl. VII Chirculescu Oana (80), Ciuciulete Claudia (100), Sandu Horia (40), Zdrucea Manuela Costiana (100), cl. VIII Tironcac Adela (97) ; Ş. g. 23 cl. V Voicu Georgeta (50) ; Ş.g. 30 cl. V Bodea-Radu Daniela (30), cl. VIII Cruceru Aurelian (148) ; Ş. g. 31 cl. V Niţă Elisabeta (98), cl. VI Pătuleanu Diana (77), Sîrbu Marius (88), cl. VIII Brînzan Laura (90) ; Ş. g. 32 cl. V Bogatoniu Adriana (90), Ionescu Lavinia (110), cl. VI Lupu George Gabriel (64), Purcărelu Bogdan (78), Chiriţă Marius (30) : Ş. g. 33 cl. V Barbu Ionela Lucia (49), Cochină Ionica Mihaela (78), Udrea Emil (35), Spiridon Marius (64), Carşin Elena Daniela (60), Tănăsescu Marcel (60) ; Lic. „Fr. Buzeşti" cl. V Voinea Gheorghe Sorinel (100), cl. VI Alexandrescu Cătălin (150), Lăpădat Alina (50), cl. VIII Balcangiu Adriana (130), cl. XI Savin Horaţiu (120), Iliescu Corina (145) ; Lic. „N. Bălcescu" cl. II Petrescu Nicoleta (20), cl. IV Petrescu Silvia (30), cl. XI Tătar Radu (153) ; Lic. ped. cl. V Antonie Cătălin (10) ; **CUGIR** (ALBA) Ş. g. 2 cl. VI Aldea Monika Iulia (88), Badea Alina (90), Badea Virginia (120), Binder Michaela (93), Faur Cătălina Flavia (176) ; **CURTEA DE ARGEŞ** Ş. g. 1 cl. IV Chirvasiu Andreea (115) ; Ş. g. 5 cl. VIII Mohanu Graţiela (43), Pletea Marian (134) ; Ş. g. 6 cl. V Mateescu Mădălina (180) ; Lic. „Vl. Vodă" cl. XI Tuţă Diana (166) ;

GALAŢI (GALAŢI) Ş. g. 6 cl. VI Trifan Nicolae (128), cl. VII Anghel Octavian (71) ; Ş. g. 10 cl. V Coman Valentina (59), Drulea Geanina (70), Foamete Olivia (68), Lungu Iulia (70), Mărgărit Aurelian (68), Peceli Daniela (68), Prodan-Sorin (67), Radu Cristinel (68), Rădulescu Laura (62), Tilihoi Cristian (59) ; Ş. g. 13 cl. VI Epure Liviu (78) ; Ş. g. 24 cl. V Puşcaş Paul (90), cl. VI Mateiţă Gabriel (120), cl. VII Cocalcu Gily (150), cl. VIII Vasile Anca (100) ; Ş. g. 25 cl. V Bulgaru Camelia (80), Mocanu Ancuţa (80), Purcaru Brînduşa (82), cl. VII Gervescu Marius (140), Manolache Cătălin (153), Mihăilescu Carmen (104), Pavel Tamara (180), Săvucă Alina (134), Vasiliu Liliana (138) ; Ş. g. 28 cl. V Bordeanu Mihai (100), Costeanu Viorel (220), Cristofor Adelina (120), Greporetti Mihuţ (100), Marinescu George (86), Panaite Valentin (79), Popescu Alin (115), Todiruţă Oana (100), Tegan Ana-Maria (111), cl. VII Cozma Marius (150), Marica Loredana (96), Popoiu Bogdan (130), cl. VIII Kea Sofica (118), Moşescu Daniela (110), Răşanu Cristian (111) ; Ş. g. 38 cl. V Nepelcu Constantin (50), Popovici Mihaela (60) ; Ş. g. 42 cl. VI Drăgan Mihai (96), Pascu Lavinia (65), cl. VIII Lungu Vlad (100) ; **GĂEŞTI** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. cl. VII Miinea Marius (100), cl. VIII Nicolae Lucian (120) ; **GĂLĂŢENI** (TELEORMAN) Ş. g. cl. VI Tecuceanu Anişoara (43) ; **GHELARI** (HUNEDOARA) Ş. g. cl. V Toth Margareta (65) ; **GHINDENI** (DOLJ) Ş. g. cl. VIII Ilie Florina (90), Matei Cătălin (50) ; **GILORT** (GORJ) Ş. g. cl. V Manciu Mihaela (97), Tătaru Mirela (80), Tătaru Costel (45), cl. VI Petcu Viorel (110), Ruiu Alina (120), Sfârlogea Ştefanida (120) ; **GRINŢIEŞI** (DR. TR. SEVERIN) Ş. g. cl. VI Ion Gabriel (10) ;

LELEŞTI (GORJ) Ş. g. cl. VII Apostol Maria (118), Cocolea Ion (170), Popeangă Dragoş (76), Ularu Sorin (180), Voicilolu Marinela (128) ; **LUCIENI** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. cl. VI Neagu Marian (69), Popa Florica (98) ; **LUGOJ** (TIMIŞ) Ş. g. 5 cl. VII Veneaţ Gabriel (87) ; Ş. g. 6 cl. VI Alexandrescu Cosmin (87) ; **LUDUŞ** (MUREŞ) Ş. g. 2 cl. VI Fekete Tunde (150), Feher Valeria (110), Mărgineanu Adriana (90), Onac Dumitru (135) ; **LUPENI** (HUNEDOARA) Ş. g. 2 cl. V Bolosin Minodora (150), Botoman Dan (140) ; **NICULIŢEL** (TULCEA) Ş. g. cl. V Bouraş Mirela (56), cl. VI Ion Elisabeta (50), Miron Anca (75) ;

OLTENIŢA (CĂLĂRAŞI) Ş. g. 2 cl. VIII Ştefan Mugurel (156) ; **ORADEA** (BIHOR) Ş. g. 6 cl. III Vereş Emanuel (100) ; Lic. filolog. ist. cl VII Teaha Roxana (40) ; **ORŞOVA** (MEHEDINŢI) Ş. g. cl. V Ilţode Simona (140), Truşca Marina (175) ; **OTELU ROŞU** (CARAŞ SEVERIN) Ş. g. 3 cl. V Motrescu Bianca (75), Palcasin Loredana (80), Popinciuc Nadina (80) ; **TĂŞNAD** (SATU MARE) Ş. g. cl. V Netea Aurel (137) ; **TECHIRGHIOL** (CONSTANŢA) Ş. g. cl. V Buboc Janetta (160) cl. VI Baisa Ghiulan (30) ; **TECUCI** (GALAŢI) Ş. g. 2 cl. IV Dămăceanu Florentina (100), Potîrniche Paul (100), cl. V Motoca Paula (170), Ignat Aureli (40), Ilie Iulian (50), Nicu Dan (40), cl. VI Rusu Dorina (90), cl. VII Bejan Florin (26) ; Ş. g. 5 cl V Bicheianu Liliana (90), Burghelea Diana (69), Ilie Mihail Valentin (60), Manolin Ionuţ (57), cl. VI Lazăr Mihaela (140), Munteanu Raluca (95), cl. VII Ţocu Cătălin (118), Ş. g. 6 cl. V Balica Laurenţiu (37), Plătică Lucian (44), Milea Adina (57), Pisiaru Sorin (60), cl. VI Bălan Romeo (60), Neagu Magdalena (80), Topală Florinel (110) ; Ş. g. 8 cl. IV Stroia Mihaela Carmen (110), Ş. g. 10 cl. V Cutaş Cristina (56), cl. VI Bigea Manuela (45), cl. VII Diaciuc Daniel (60), Robin Brînduşa (200) ; **TEIUŞ** (ALBA) Ş. g. cl. V Ardelean Rareş (52) ; **TIMIŞOARA** (TIMIŞ) Ş. g. 24 cl. V Todea Emanuel (31) ; Ş. g. 26 cl. VII Abrudan Denise (112) ; Lic. „C. D. Loga" cl. V Moisescu Alina (100), cl. VIII Turcu Flavius (329) ; Lic. ped. cl. IV Ciolescu Ion Paul (160) ; Lic. filolog. ist. cl, VII Vasiluţă Lucian (89) ; **TITU-GARĂ** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. cl VII Ariton Aurora (106) ;

TÎRGOVIŞTE (DÎMBOVIŢA) Ş. g. 2 cl. VI Neagu Camelia (130) ; Ş. g. 5 cl. V Cănuţescu Adrian (83), cl. VI Stănescu Denisa (65), Tănase Mihail (118), cl. VII Enescu Diana (80), Do-

Scanned with OKEN Scanner

Drescu Oana (75); Ş. g. 6 cl. V Bejan Margareta (130), Bildăresc Roxana (82), Cernăvodeanu Cristina (52), Nastasia Marius (72), Nistor Ionel Florin (61), Pătraşcu Viorica (46), cl. VI Fluture Gabriela (106), Muşcţescu Amalia (97): Ş. g. 8 cl. VI Vlaicu Alexandru (310), cl. VII Cojocaru Alina-Carmen (60), Dumitrescu Gabriel (90), Popa Mihai (113); **TÎRGU-JIU** (GORJ) Ş. g. 3 cl. V Perciun Burtea Monica (169); Ş. g. 4 cl.VI Perciun Burtea Roxana (150); Ş. g. 5 cl. VI Stroie Cătălin (119); Ş. g. 12 cl. VII Văduva Dumitru (291), Văduva Amalia Aurora (110), cl. VIII Stoian Sorin-Mirel (88); Lic. „T. Vladimirescu" cl. IX Dobrescu Daniel (19); **TÎRGU-LĂPUŞ** (MARAMUREŞ) Lic. ind. cl. X Pop Călin (160); **TÎRGU-MUREŞ** (MUREŞ) Ş. g. 7 cl. VI Negrea Nataly (63); Ş. g. 9 cl. VI Stan Ileana (130): Ş. g. 16 cl. VI Aştelean Anemona (130), Bucur Monica Ana (50), Gavrilă Nicoleta (56), Marica Dana (148), Miza Adriana (107), Oprea Codruţa (110); Lic. „Al. Papiu Ilarian" cl. X Lupu Cristian (67), cl. XI Ijac Georgeta (200); **TÎRGU-NEAMŢ** (NEAMŢ) Ş. g. 3 cl. V Andone Marius Simona (80), cl. VI Cojocaru Cristinel (201), Popa Iulia (230); Ş. g. 5 cl. VI Surugiu Cristian (40), cl. VII Dănilă Dan (130), Munteanu Dan (96), Rotaru Constantin (187); **TÎRGU-OCNA** (BACĂU) Ş. g. 1 cl. V Grozescu Bogdan (82); **TURDA** (CLUJ) Ş. g. 6 cl. V Răşinar Antonela (30), cl. VII Dragoste Carmen (200), Haneş Ion (125), Şandru Lucia (150); Ş. g. 7 cl. VI Cocan Codrina (120), Pascu Mihaela (100); **TURNU-MĂGURELE** (TELEORMAN) Ş. g. 2 cl. VII Dulgheru Ionela Monica (140); **UDEŞTI** (SUCEAVA) Ş. g. cl. V Şuiu Cristian (60); **UNGHENI** (ARGEŞ) Ş. g. cl. VI Pana Adela (48).

ARAD (ARAD) Lic. „I. Slavici" cl. V Verzea Onorina (96), Verzea Valentin (177); **BAIA-MARE** (MARAMUREŞ) Ş. g. 4 cl. VII Bondrea Beatrice (101); **BEIUŞ** (BIHOR) Lic. „S. Vulcan" cl. VI Frenţ Claudia (88), Negrea Daniela (90), Toda Ionela (89), cl. VIII Lucan Marius (100); **BÎRLAD** (VASLUI) Lic. mat. fiz. „Gh. Roşca Codreanu" cl. IX Cristea Mihaela (83), Năstruţ Daniel (103), Pascu Bianca (60), Turcu Gabriela (83); **BÎRZEŞTI** (ARGEŞ) Ş. g. cl. VII Pătrulescu Cornelia Elena (60); **BOTOŞANI** (BOTOŞANI) Ş. g. 7 cl. V Mihai Sebastian (68), cl. VI Pavliuc Irina-Adriana (159); Lic. mat. fiz. „A. T. Laurian" cl. IX Mihalache Radu (120); **BRAŞOV** (BRAŞOV) Ş. g. 22 cl. VII Chişlaru Victor (30); **BRĂILA** (BRĂILA) Ş. g. 6 cl. V Vodă Remuş Ştefan (30); **BUCUREŞTI** Ş. g. 15 cl. VII Popescu Ioana (180); Ş. g. 57 cl. V Ceapă Paul-Adrian (100), cl. VI Smărăndoiu Liviu (180); Ş. g. 97 cl. V Lucaciu Cristinel (120); Ş. g. 119 cl. VII George Bogdan Stana (98); Ş. g. 195 cl. V Cîmpeanu Nicoară (70); Lic. „G. Enescu" cl. IV Borcia Alecsandra Miruna (180); Lic. ind. nr. 34 cl. VI Bătătorescu Cosmin (80); **BUDUREASA** (BIHOR) Ş. g. Budureasa cl. VIII Goina Dorina (61);

CĂLĂRAŞI (DOLJ) Ş. g. 4 cl. V Zeţa Veronica (154); **COSTEŞTI** (ARGEŞ) Ş. g. 1 cl V Didiţa Gabriela (70), Iordache Anişoara (60); Zirlescu Monica (60); **CRAIOVA** (DOLJ) Ş. g. 22 cl. VI Chirculescu Oana (100), Voinea Daniela (97) cl. VII Nicu Simiana (100); **DANEŢI** (GORJ) Ş. g. 1 cl. VII Ciuguliu Cornelia Mariana (79); **DEJ** (CLUJ) Ş. g. 1 cl. V Dumitru Ciprian (60), Camelia Anca (44). Santa Ioan Cristian (54), Tiţa Dina Maria (50), cl. VI Timan Adrian (88), cl. VII Borzaşi Alin (120), Pop Teana (100); Ş. g. 3 cl. V Bodiş Călin (90), Chiuzan Corina (48), Cîmpean Celia (70), Heyya Eniko Alina (63), Hodorogea Anca (70), Măgurean Liana (60), Orşan Teodora (70), Pintea Mihaela (68), Sandru Lavinia (50); cl. VI Cuţuiu Daniela (80+100), Gaoriş Adrian (110), Ilieş Nicoleta (100), Mureşan Simona (72), Pop Anamaria (117), Bobiş Vădeanu Traiana (100), cl. VII Mărzea Paul (150), Moldovan Ioana (142), Romega Daniela Sorina (78), cl. VIII Negreanu Lucia (110), Pop Alina (69), Răducan Ioana Horea (98); Ş. g. 4 cl. VI Prosuc Mia (129), cl. VII Pop Daniel (45); **DEVA** (HUNEDOARA) cl. VII Guga Cristian (70); **DRĂGĂNEŞTI** (BIHOR) Ş. g. 1 cl. IV Dumitru Ancuţa Eugenia (430); cl. V Crăciun Florentina (89), Dinescu Monica (87), Humungă Daniela (81), Mocloacă Vali (84), Pacianel Marian (73), Samoilă Daniela (90), Smarandache Ileana (78), Stanca Gabriela (81); **DRĂGĂŞANI** (VÎLCEA) Ş. g. 2 cl. V Crăescu Corina (80), cl. VIII Neghină Dana (110); **DROBETA-TR. SEVERIN** (TR. SEVERIN) Ş. g. 1 cl. V Leuştean Dan (79); Ş. g. 2 cl. V Nişulescu Stelian (48); Ş. g. 3 cl. V Chiuciu Adrian (42), Popescu Marian (69), Vasilescu Mihaela (120), cl. VI Andoniu Anita (43), Timoş Giovana Lavinia (84), Neagoe Romana (96), Pădureţu Marin (30), Sîrboiu Dragoş Eugen (86),cl. VII Popa Iulia (90), Popescu Elena (100), Vasilescu Mihaela (87), cl. VIII Belcia Minodora (60); Ş. g. 4 cl. V Alexandrescu Amalia (81), Ilie Monica (90), Pătrulescu Daniela (76), Rădulescu Nicolae (86), cl. VI Nenim Cristina (87), Truia Bica (79), cl. VII Dobrescu Daniel (70), Glunciu Petre Ion (70), Ştefan Mihai (50); Ş. g. 9 cl.V Curiman Carmen (41), Neacşu Robert (87), cl. VII Diaconescu Georgeta (158), cl. VIII Apostol Cristi (80); **DR. PETRU GROZA** (BIHOR) Ş. g. cl. V Bora Nicoleta (90), Ungur Dorina (90); **DOROHOI** (BOTOŞANI) Ş. g. cl. VI Bobrlich Bernand (100); Ş. g. 5 cl. V Mihai Ana-Maria (50), Ştefănescu Ariadna Raluca (170); **DUDEŞTI** (BRAŞOV) Ş. g. cl. V Potică Luiza Mihaela (50), Peiov Laura (126), Chiper Onuţa (100), Velciov Natalia (126); **FĂGĂRAŞ** (BRAŞOV) Ş. g. 6 cl. V Dan Maria (45); **FĂLTICENI** (SUCEAVA), Ş. g. 2 cl. V Navrea Irina Florentina (80); **FETEŞTI** (IALOMIŢA) Ş. g. 7 cl. VI Tudor Adriana (59), cl. VII Vălău Ion Doru (70); **FOCŞANI** (VRANCEA) Ş. g. 5 cl. VI Dumitru Mihaela (138); Ş. g. 9 cl. V Diaconu Cristina (24), Popa Adriana (21), cl. VII Chirilă Olivia (50);

GALAȚI (GALAȚI) Ș. g. 6 cl. V Drăghici Marius (17), cl. VI Pripaie Liviu (60), cl. VII Balaiș Cristina (125); Ș. g. 13 cl. VI Bercu Gabriel (110); Ș. g. 25 cl. V Batog Mirela (96), Bicilneru Magda (120), Olinici Cosmin (112), cl. VII Cotobel Mihai (163); Ș. g. 28 cl. VI Arhip Andy (114), Cazan Monica (105), Chiculiță Dana (110); Ș. g. 29 cl. V Vlad Ioana (60); Ș. g. 33 cl. V Costescu Iulia (57), Șandu Sorin (67); Ș. g. 42 cl. V Costea Gabriela (60), cl. VI Mustețea Carmen (164); GILGĂU (SĂLAJ) Ș. g. cl. III Balas Viorica (89), Baneas Ileana (89), Bobeș Anca Ioana (89), Gavriș Ioan Costică (89), Husa Sanda (89), Lar Silviu (89), Mureșan Georgeta (89); GUGEȘTI (VRANCEA) Ș. g. 1 cl. V Cucu Violeta (80);

HUNEDOARA (HUNEDOARA) Lic. mat. fiz. cl. VI Konez Adalbert (69); HUȘI (VASLUI) Ș. g. 3 cl. V Suman Violeta (27); IAȘI (IAȘI) Lic. Național cl. VI Garabedeanu Ilinca (83), Vițcu Ioan (20); ÎNSURĂȚEI (BRĂILA) Lic agroind. cl. XI Alexandru George (48); LUDUȘ (MUREȘ) Ș. g. 2 cl. VI Moldovan Cristina (136), Nistor Alina (136), Rusu Alina (87), Sărăcuț Claudia (87), Stoica Coralia (125), Turdean Ovidiu Laurean (87); MOINEȘTI (BACĂU) Ș. g. 2 cl. VII Prohozescu Laura Nicoleta (90); MORENI (DÎMBOVIȚA) Ș. g. 1 cl. V Ghindă Mihai (180), Iordache Robert (145), Irimia Victor (180), cl. VII Deaconu Stelu (84); Ș. g. 4 cl. V Glăvan Gheorghe (45), cl. VI Neculoiu Cătălin (107), cl. VII Enăchescu Anca (118), Lucaș Corina (108); MOTRU (GORJ) Ș. g. 2 cl. V Luță Florian (90); MUREȘENI (VASLUI) Ș. g. cl. VII Blasciuc Larisa (100), Schiopu Melanica (100); ORȘOVA (MEHEDINȚI) Ș. g. cl. VII Băghină Ionel (74), Filipescu Daniel (56), Minulescu Doina (76), Oprișor Carmen Gabriela (71), Sporea Daniela Steluța (71);

PĂUNEȘTI (VRANCEA) Ș. g. 1 cl. VII Banu Lenuța (110), Chiriac Viorica (110), Contea Lenuța (110), Novac Corina (110); PITEȘTI (ARGEȘ) Ș. g. 5 cl. V Oprea Narcis (90); PLOIEȘTI (PRAHOVA) Ș. g. 3 cl. VI David Lavinia (80); Ș. g. 17 cl. V Banu Raluca (80); Lic. ped. cl. VI Iliescu Simona (76), Popa Răzvan (62); fără mențiune de clasă și școală: Aldea Felicia (70); PREDEAL (BRAȘOV) Lic. cl. VI Pintea Ovidiu (130); RĂDĂUȚI (SUCEAVA) Ș. g. 3 cl. VII Asostachioaie Emanuel (85); Ș. g. 5 cl. V Șerban Elena (68); RÎMNICU VÎLCEA (VÎLCEA) Ș. g. 4 cl. V Trăncănău Simona (10); Lic. ind. 7 cl. V Vasilaș Dragoș (70); RÎȘNOV (BRAȘOV) Ș. g. 2 cl. VII Neculoiu Gabriel (60); RUGINEȘTI (VRANCEA) Ș. g. 1 (fără clasă) Balaci Fănuța (103); cl V Cîmpureanu Maricica (127); SIGHETU MARMAȚIEI (MARAMUREȘ) Ș. g. 2 cl. V Colder Francisca (130), cl. VII Hotea Daniela (30), Kiss Iutka (30), Petrică Daniela (20), Petrovai Florentina (30); Ș. g. 3 cl. V Chindriș Monica Crina (30); SIMERIA (HUNEDOARA) Ș. g. 2 cl V Poenar Cosmin (87), Stîrc Adriana (85); SÎNMIHAIU ALMAȘULUI (SĂLAJ) Ș. g. cl. VI Alb Ovidiu Călin (127); SLATINA (OLT) Ș. g. 5 cl. V Tabacu Diana (40); SUCEAVA (SUCEAVA) Ș. g. 4 cl. V Alucăi Dorin (90), Bompa Narcisa (90), Ciaparii Iulian (100), Nica Bogdan (90), Solovan Loredana (90), Teodorescu Daniela (60); ȘOMCUȚA MARE (MARAMUREȘ) Ș. g. cl. VII Ghiță Doina (83);

TECHIRGHIOL (CONSTANȚA) Ș. g. cl. V Basia Ghiulan (12); TECUCI (GALAȚI) Ș. g. 5 cl. II Rusu Cătălina (169); TIMIȘOARA (TIMIȘ) Ș. g. 26 cl. V Gărdan Maria Elena (10), Munteanu Dana (30); Lic. „N. Lenau" cl. V Gaspar Păstorel (150); TÎRGU JIU (GORJ) Ș. g. 12 cl. V Arancuțean Mihaela (90); TÎRGU LĂPUȘ (MARAMUREȘ) cl. XI Pop Călin (142); TÎRGU MUREȘ (MUREȘ) Ș. g. 9 cl. V Stan Ileana (106); TURNU MĂGURELE (TELEORMAN) Ș. g. 2 cl. VI Dulgheru T. Ionela Monica (158); ȚÎBUCANI (NEAMȚ) Ș. g. Davidenl, fără clasă: Grigore Elena (106); URSAD (BIHOR) Ș. g. cl. VIII Burz Adrian (100); VADURI (NEAMȚ) Ș. g. cl. V Birgăoanu Florentina (49), Curcan Violeta (56).

I. P. Informația c. 1349 Index 41 601 Lei 7

Scanned with OKEN Scanner

ISSN 0016–5441

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

9

DIN CUPRINS:

— NOTE MATEMATICE
— CONCURSUL INTERJUDEȚEAN „TRAIAN LALESCU", EDIȚIA A III-A, INEU, 1987
— PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU, LICEU, CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR
— PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU, LICEU, PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M., CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

ANUL XCII nr. 9/1987

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

		Pag.
1.	Asupra iraționalității numărului π, de *Valeriu Anisiu*	305
2.	Sfera celor opt puncte, de *Mihai Miculița*	306
3.	Asupra unei formule a lui Gauss	309
4.	Concursul interjudețean „Traian Lalescu", ediția a III-a, Ineu, 1987, prima zi, 5 iunie	309
5.	Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E : 8939, E : 8944, E : 8945, E : 8947, E : 8951, E : 8960)	314
6.	Probleme rezolvate pentru liceu (20870, 20736, 20792, 20889, 20890)	319
7.	Probleme rezolvate pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C : 627, C : 636)	324
8.	Probleme pentru ciclul primar (65—72)	325
9.	Probleme pentru gimnaziu (E : 9227 — E : 9250)	326
10.	Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu (O.G.55 — O.G.56)	330
11.	Probleme pentru liceu (21205—21232)	330
12.	Probleme pregătitoare pentru O.I.M. și O.B.M. (O : 524 — O : 526)	334
13.	Probleme pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C : 721 — C : 728)	335
14.	Rubrica rezolvitorilor de probleme	336

ANUL XCII **9** 1987

COMITETUL DE REDACȚIE

Lector univ. **Dumitru Acu**, Sibiu; lector univ. **Toma Albu**; lector univ. **Horea Banea**, Brașov; lector univ. **Octavian Băsică**; conf. univ. **Dan Brânzei**, Iași; prof. **Constantin Cărbunaru**; prof. **Marcel Chiriță**; prof. **Pal Dalyay**, Tg. Mureș; lector univ. **Inocențiu Drăghicescu**; prof. **Ioana Drăghici**; înv. **Alexandrina Dumitru**; prof. **Ilie Gheorghiță**; prof. **Adrian Ghioca**, Sinaia; cercet. princip. **Gheorghe Gussi**; lector univ. **Stere Ianuș**; prof. **Ștefan Kadar**, Baia Mare; lector univ. **Constantin Niță**; prof. univ. **Arpad Pal**, Cluj-Napoca; lector univ. **Laurențiu Panaitopol**; prof. **Olimpia Popescu**, Ploiești; matem. **Paul Radoviei-Mărcuțescu**; lector univ. **Gheorghe Sirețchi**; lector univ. **Ioan Tomescu**; prof. **Florin Vulpescu-Jalea**.

REDACȚIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor șef (delegat): Acad. **N. Teodorescu**; redactori principali: prof. **Ilie Ilieșcu**, prof. **Liviu Pârșan**, prof. **Marcel Țena**; redactori principali onorifici: **C. Ionescu-Țiu**, asist. univ. **Elifterie Rogai** redactori: prof. **Liliana Balaci**, prof. **Alexandru Constantinescu**.

Responsabil de număr: prof. **Marcel Țena**.

ADRESA REDACȚIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.53 — București, 1, cod. 79543. Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA, Sectorul Export-Import-Presă Calea Griviței nr. 64—66, P.O.Box 12-201, Telex 10376 Prafir, București, ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XCII nr. 9 Septembrie 1987

ASUPRA IRAȚIONALITĂȚII NUMĂRULUI π

de Valeriu Anisiu, asistent, Cluj-Napoca

În nota [1] se dă o demonstrație a iraționalității numărului π care are ca punct de sprijin esențial problema O : 94 rezolvată în [2]. Deși nu se specifică explicit, în soluția problemei O : 94 apare însă necesitatea utilizării iraționalității lui π. Într-adevăr, în cadrul raționamentului trebuie contrazisă egalitatea :

$$\cos(\varphi + n) + i \sin(\varphi + n) = \cos(\psi + m) + i \sin(\psi + m) \tag{1}$$

unde $m, n \in \mathbf{Z}$, $m \neq n$ și $\varphi, \psi \in A$. (Notațiile sînt cele din [2]).

Metoda utilizată nu permite contrazicerea egalității (1) pentru cazul $\varphi = \psi \in A$, dar atunci $\varphi + n = \varphi + m + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), de unde $\pi = (n - m)/2k \in \mathbf{Q}$.

În absența unei soluții a problemei O : 94 care să nu utilizeze ea însăși iraționalitatea lui π, demonstrația din [1] nu este acceptabilă.

Prezentăm în continuare o demonstrație directă (aparținînd „folclorului matematic") a iraționalității lui π.

Să presupunem prin absurd că $\pi = a/b$, cu $a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$. Considerăm funcția $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n(a - bx)^n/n!$, unde n este un număr natural arbitrar. Se constată imediat că pentru orice x din $[0, \pi]$ avem

$$f(x) = f(\pi - x). \tag{2}$$

Vom calcula $f^{(k)}(0)$. Este evident faptul că $f^{(k)}(0) = 0$ pentru $0 \leqslant k < n$ sau $k > 2n$ (căci f este polinom de gradul $2n$).

Pentru $n \leqslant k \leqslant 2n$ folosind formula de derivare a produsului a două funcții (*Leibniz*) avem :

$$f^{(k)}(0) = 1/n! \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}(x^n) \frac{\mathrm{d}^{k-i}}{\mathrm{d}x^{k-i}}((a - bx)^n)\Big|_{x=0}.$$

Singurul termen nenul al sumei se obține pentru $i = n$, deci :

$$f^{(k)}(0) = (1/n!)\, C_k^n\, n! \cdot n(n-1) \ldots (2n - k + 1) \cdot (-b)^{k-n} \cdot a^{2n-k}.$$

Așadar, pentru orice $k \in \mathbf{N}$, $f^{(k)}(0) \in \mathbf{Z}$, (3).

Derivînd membru cu membru (2), pentru $x = 0$ se obține :

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k f^{(k)}(\pi), \text{ deci } f^{(k)}(\pi) \in \mathbf{Z}, \tag{4}$$

Fie $I = \int_0^\pi f(x) \sin x \, \mathrm{d}x$. Să arătăm că $I \in \mathbf{Z}$. Integrînd prin părți obținem

$$I = \int_0^\pi f(x)(-\cos x)' \, \mathrm{d}x = -f(x)\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\cos x \, \mathrm{d}x = \alpha_1 + \int_0^\pi f'(x)\cos x \, \mathrm{d}x,$$

unde $\alpha_1 \in \mathbf{Z}$ conform (3) și (4). Integrînd încă o dată prin părți, obținem :

$$I = \alpha_1 + f'(x)\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x)\sin x \, \mathrm{d}x = \alpha_2 - \int_0^\pi f''(x)\sin x \mathrm{d}x,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\alpha_j \in \mathbf{Z}$. Repetînd procedeul, se obține

$$I = \alpha_{2n+1} + (-1)^n \int_0^\pi f^{(2n+1)}(x) \cos x \, dx,$$

cu $\alpha_{2n+1} \in \mathbf{Z}$ (folosind (3), (4)). Dar $f^{(2n+1)} = 0$, deci $I \in \mathbf{Z}$. Pe de altă parte, pentru $x \in (0, \pi)$ avem:

$$0 < f(x) \sin x \leqslant f(x) < \pi^n a^n / n!,$$

și prin integrare obținem:

$$0 < I < \pi^n a^n / n! \cdot \pi.$$

Dar $\lim_{n \to \infty} \pi^n a^n / n! = 0$, deci alegînd pe n suficient de mare vom avea $0 < I < 1$, ceea ce contrazice faptul că $I \in \mathbf{Z}$. Așadar, ipoteza $\pi \in \mathbf{Q}$ conduce la o contradicție, și demonstrația este terminată.

Observații. 1) Faptul că π nu este rațional se obține ca un caz particular al rezultatului fundamental al lui *Lindemann* din anul 1882 potrivit căruia π este un număr transcendent. (Un număr complex α se numește algebric dacă există un polinom nenul $f \in \mathbf{Z}[X]$ astfel ca $f(\alpha) = 0$; în caz contrar α se numește transcendent). Demonstrația transcendenței lui π (vezi [4], [5]) este mai laborioasă dar principial nu diferă esențial de cea prezentată aici.

2) În încheiere mai menționăm două rezultate clasice privind numerele transcendente:

(i) Dacă $\alpha \neq 0$ este algebric atunci e^α este transcendent (*Hermite—Lindemann*).

(ii) Dacă α este algebric, $\alpha \neq 1$ și $\alpha \neq 0$, iar β este algebric irațional atunci α^β este transcendent (*Gelfond—Schneider*).

Demonstrațiile acestor teoreme (vezi [3]) se bazează pe teoria funcțiilor de variabilă complexă. De remarcat că folosind formula lui *Euler*, $e^{i\pi} = -1$, din (i) rezultă imediat transcendența lui π.

BIBLIOGRAFIE

[1] *Burlec, V.*, O demonstrație a iraționalității numărului π, G.M. 10/1984, pag. 356.

[2] *Kolumban, I.*, Problema O : 94, G.M. 8/1980, pg. 359.

[3] *Lang, S.*, Algebra, Addison—Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1965.

[4] *Meghea, C.*, Bazele analizei matematice, Ed. Științifică și enciclopedică, București, 1977.

[5] *Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S.*, Analiză matematică, vol. I, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1971.

N.R. Cercul vicios din [1] ne-a fost sesizat înaintea notei de față de către lector univ. *Gh. Eckstein* de la Universitatea din Timișoara.

SFERA CELOR OPT PUNCTE

de Mihai Miculița, profesor, Oradea

Sînt cunoscute următoarele două teoreme:

Teorema 1. *Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru și P un punct oarecare. Simetricele planelor (PA_iA_j) $i \neq j$, față de planul bisector al diedrului de muchie (A_iA_j) al tetraedrului, sînt concurente într-un punct Q, numit izogonalul punctului P față de tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$.*

Teorema 2. *Punctele P și Q sînt izogonale față de tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$, atunci și numai atunci cînd au loc relațiile:*

$$PP_1 \cdot QQ_1 = PP_2 \cdot QQ_2 = PP_3 \cdot QQ_3 = PP_4 \cdot QQ_4, \tag{1}$$

unde cu X_i am notat proiecția punctului $X \in \{P, Q\}$ pe planul feței opuse vîrfului A_i, $i = \overline{1,4}$, a tetraedrului.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrațiile teoremelor 1 și 2 pot fi găsite în [1].

Vom demonstra în această notă încă două teoreme.

Teorema 3. *Proiecțiile pe fețele unui tetraedru a două puncte izogonale, sînt opt puncte cosferice.*

Demonstrație: Folosind notațiile din enunțurile teoremelor 1 și 2, vom arăta că punctele P_i și Q_i, $i = \overline{1,4}$, sînt situate pe o sferă cu centrul în mijlocul M al segmentului (PQ) (v. fig. 1).

Dreptele PP_i și QQ_i fiind perpendiculare pe planul $(A_jA_hA_k)$, $\{i, j, h, k\} = \{1, 2, 3, 4\}$, rezultă că:

$$PP_i \| QQ_i, \quad (2) \quad \text{și} \quad PP_i \perp P_iQ_i,\ QQ_i \perp P_iQ_i, \quad (3).$$

Notăm $\{R_i\} = PP_i \cap MQ_i$, $i = \overline{1,4}$, (v. fig. 2).

Din congruența triunghiurilor MPR_i și MQQ_i, urmează că:

$$PR_i = QQ_i, \quad (4) \quad \text{și} \quad MR_i = MQ_i, \quad (5).$$

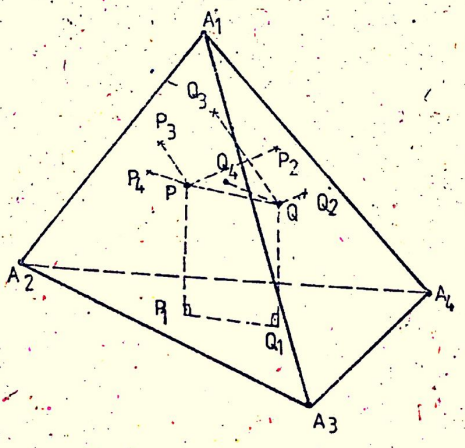


Fig. 1

În triunghiul $R_iP_iQ_i$ dreptunghic în P_i, pe baza relației (5), (P_iM) este mediană, așa că:

$$MP_i = MR_i = MQ_i, \quad (6).$$

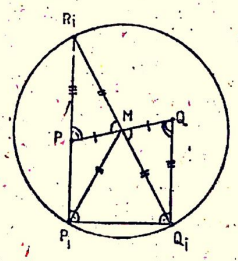


Fig. 2

Din relațiile (1) și (4), urmează că:

$$PP_1 \cdot PR_1 = PP_2 \cdot PR_2 = PP_3 \cdot PR_3 = PP_4 \cdot PR_4, \quad (7)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd acum seama de expresia puterii punctului P față de cercul circumscris triunghiului $R_iP_iQ_i$, $i = \overline{1,4}$, avem:

$$PP_i \cdot PR_i = MP_i^2 - MP^2, \tag{8}$$

Din relațiile (7) și (8), rezultă că:

$$MP_1 = MP_2 = MP_3 = MP_4, \tag{9}$$

În fine, din relațiile (6) și (9), urmează afirmația teoremei.

Observație. Teorema 3 este extensia în spațiu a următoarei teoreme din geometria triunghiului: *Proiecțiile pe laturile unui triunghi a două puncte izogonale, sînt șase puncte conciclice. (cercul celor șase puncte).* În [4], la pagina 424, se arată că această teoremă a fost descoperită și demonstrată în 1886 de către *Joseph Neuberg*, incluzînd-o într-un studiu geometric profund. Nu cunoaștem alte citări ale acestei teoreme.

Teorema 4. *Perpendicularele ridicate în centrele de greutate G_i, $i = \overline{1,4}$, ale fețelor unui tetraedru ortocentric $A_1A_2A_3A_4$, pe planele acestor fețe, sînt concurente într-un punct L. Punctul L este izogonalul ortocentrului H al tetraedrului.*

Demonstrație. Vom arăta că punctul L este determinat prin:

$$\overrightarrow{GH} = -3 \cdot \overrightarrow{GL}, \tag{10}$$

unde cu G am notat centrul de greutate al tetraedrului (v. fig. 3). Avem:

$$\overrightarrow{GA_i} = -3 \cdot \overrightarrow{GG_i}, \tag{11}$$

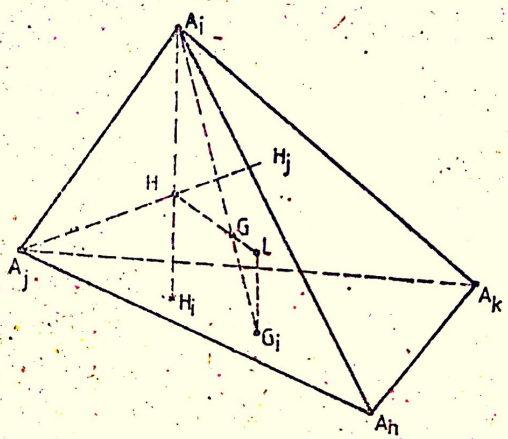


Fig. 3

Din relațiile (10) și (11), urmează că $\overrightarrow{A_iH} = -3 \cdot \overrightarrow{G_iL}$, așa că

$$A_iH = 3 \cdot G_iL, \quad (12) \quad \text{și} \quad A_iH \| G_iL, \quad (13).$$

Întrucît $HH_i \perp (A_jA_hA_k)$, $\{i, j, h, k\} = \{1, 2, 3, 4\}$, ținînd seama de relația (13), urmează că $G_iL \perp (A_jA_hA_k)$, (14).

Pe de altă parte, dacă H_i este piciorul înălțimii duse din vîrful A_i, atunci:

$$HH_1 \cdot HA_1 = HH_2 \cdot HA_2 = HH_3 \cdot HA_3 = HH_4 \cdot HA_4, \tag{15}$$

Din relațiile (12) și (15), rezultă că

$$HH_1 \cdot LG_1 = HH_2 \cdot LG_2 = HH_3 \cdot LG_3 = HH_4 \cdot LG_4, \quad (16).$$

În fine, din relațiile (14) și (16), în virtutea teoremei 2, urmează că punctul L este izogonalul ortocentrului H al tetraedrului.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Teorema 4 este extensia în spațiu a teoremei: *Izogonalul ortocentrului unui triunghi, este centrul cercului circumscris triunghiului (punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor).*

Din teoremele 3 și 4, urmează următoarea:

Consecință: *Într-un tetraedru ortocentric, picioarele înălțimilor și centrele de greutate ale fețelor, sînt opt puncte cosferice. (Sfera lui Euler a tetraedrului ortocentric).*

BIBLIOGRAFIE

[1] *Dan Brânzei, Sebastian Anița, Constantin Cocea*: Planul și spațiul euclidian, „Biblioteca profesorului de matematică", Editura Academiei, București, 1986.

[2] *Cezar Coșniță*: Teoreme și probleme alese de matematici, Editura de Stat didactică și pedagogică, 1958.

[3] *Nicolae Mihăileanu*: Lecții complementare de geometrie, Editura didactică și pedagogică, București, 1976.

[4] *Nicolae Mihăileanu*: Istoria matematicii, Editura Științifică și enciclopedică, 1981.

ASUPRA UNEI FORMULE A LUI GAUSS

Se știe că pentru orice n natural nenul are loc egalitatea

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n \tag{1}$$

numită de obicei formula lui *Gauss*. Ea apare în „Disquisitiones Aritmeticae" (*Gauss*, 1801).

În această egalitate φ desemnează indicatorul lui *Euler*, iar suma se face după toți divizorii naturali nenuli d ai numărului n.

Există mai multe posibilități de a stabili egalitatea (1), dintre care amintim pe aceea care utilizează formula de inversiune a lui *Möbius* și pe cea care utilizează descompunerea polinomului $X^n - 1$ în produs de polinoame ciclotomice.

În aceste rînduri vom prezenta o demonstrație scurtă a egalității (1) care utilizează cunoștințe foarte simple de aritmetică.

Demonstrația aparține lui *Emil Strauss* și este expusă în [1].

Să considerăm următoarele n numere raționale

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}, \tag{2}$$

pe care le vom gîndi ca fracții ireductibile.

Fixînd un divizor natural d al lui n, fracțiile din șirul (2) care scrise ca fracții ireductibile au numitorul d sînt cele de forma $\frac{k}{d}$, unde $1 \leqslant k \leqslant d$, $(k, d) = 1$. Acestea sînt în număr de $\varphi(d)$. Făcînd acest lucru pentru toți divizorii naturali ai lui n, epuizăm toate cele n fracții din șirul (2) și în acest fel am obținut egalitatea $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$, adică tocmai formula (1) pe care ne-am propus s-o demonstrăm.

BIBLIOGRAFIE

[1] *Gustav Wertheim*: „Anfangsgründe der Zahlentheorie", Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1902.

Redacția

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN „TRAIAN LALESCU"
EDIȚIA A III-a, INEU, 1987
Prima zi, 5 iunie
Clasa a V-a

1. Ionel afirmă că la concursul de matematică au participat 225 elevi. Costel știe că numărul fetelor participante este cu 12 mai mare decît cel al băieților participanți. Să se decidă dacă afirmația lui Ionel este adevărată.

Ad. Constantin, elev, Timișoara

Scanned with OKEN Scanner

2. Într-o veche culegere de probleme este descrisă „Decizia lui Paris" în modul următor: Zeițele Hera, Afrodita și Atena îi cer lui Paris să decidă care dintre ele este cea mai frumoasă. Iată declarațiile lor:

(1) Afrodita: „Eu sînt cea mai frumoasă";
(2) Atena: „Afrodita nu este cea mai frumoasă";
(3) Hera: „Eu sînt cea mai frumoasă";
(4) Afrodita: „Hera nu este cea mai frumoasă";
(5) Atena: „Eu sînt cea mai frumoasă".

Știind că toate afirmațiile celei mai frumoase zeițe sînt adevărate, declarațiile celorlalte fiind false, care a fost decizia?

(C.d.p.)

3. Să se determine numerele prime de 3 cifre, știind că produsul cifrelor sale este 252.

(C.d.p.)

4. Fie E o mulțime și A, B, C părți ale ei astfel încît $A \cup B = B \cup C = C \cup A = E$. Să se arate că dacă $A \cap B \cap C = \emptyset$, atunci fiecare dintre mulțimile A, B și C are cel puțin două elemente.

(C.d.p.)

Clasa a VI-a

1. Mulțimea $\mathbb{N}^*$ se împarte în grupe astfel:

$$(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), \ldots$$

unde prima grupă este formată dintr-un număr, a doua din următoarele 2 numere, etc.

a) Cu ce număr începe grupa 1987?
b) Cu cît este egală suma numerelor din grupa 1987?

D. Miheț, profesor, Timișoara

2. Fiind întrebat (în anul 1987) cîți ani are, un elev a răspuns: „În anul 1997 voi avea vîrsta egală cu suma cifrelor anului în care m-am născut". Cîți ani are elevul?

(C.d.p.)

3. a) Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Demonstrați că $AM = \frac{1}{2} BC$ dacă și numai dacă $\hat{A} = 90°$.

b) Se consideră triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$). Perpendicularele în B și C pe AB, respectiv AC, se intersectează în P. Pe semidreapta $(BP$ se ia punctul M astfel încît $PM \equiv BP$. Perpendiculara în M pe BM intersectează dreapta AC în N. Demonstrați că $CN \equiv MN$.

(C.d.p.)

4. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se construiesc în exterior pătratele $ABMN$ și $ACPQ$. Demonstrați că $MP \parallel BC$ dacă și numai dacă $AC = AB$.

(C.d.p.)

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VII-a

1. Să se precizeze dacă numărul:

$$\frac{\sqrt{994+\sqrt{1987}}-\sqrt{994-\sqrt{1987}}}{\sqrt{2}}$$

este raţional sau iraţional şi să se motiveze răspunsul.

V. Matache, asist. univ., Timişoara

2. Printr-un punct O situat în interiorul unui triunghi ABC se duc paralelele la cele trei laturi ale triunghiului, obţinîndu-se următoarele puncte de intersecţie: $M \in AB$, $N \in AC$ $(MN \parallel BC)$; $P \in AC$, $Q \in BC$ $(PQ \parallel AB)$; $R \in BC$, $S \in AB$ $(RS \parallel AC)$.

Ştiind că $\frac{AM}{AB} = \frac{BR}{BC} = \frac{CP}{AC} = k$, să se calculeze valoarea lui k şi să se precizeze poziţia punctului O.

V. Matache, asist. univ., Timişoara

3. Fie numerele reale strict pozitive a, b, c. Demonstraţi că:

$$(ab+1)(bc+1)(ac+1) \geqslant 8abc.$$

V. Matache, asist. univ., Timişoara

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi M, N, P, Q respectiv mijloacele laturilor AB, BC, CD şi AD. Fie R şi S punctele de intersecţie ale dreptelor BQ şi MD, respectiv BP şi DN, iar T punctul de intersecţie al dreptelor AR şi CS. Demonstraţi că punctele D, T şi B sînt coliniare.

V. Matache, asist. univ., Timişoara

Clasa a VIII-a

1. Să se rezolve în numere reale sistemul:

$$\begin{cases} \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{d^2}+\frac{d^2}{a^2}=4 \\ \frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{d^2}{c^2}+\frac{a^2}{d^2}=4 \\ a+b+c+d=12. \end{cases}$$

(G.M.)

2. Fie α un plan şi A, B două puncte neconţinute în α. Determinaţi $P \in \alpha$ astfel încît suma $PA + PB$ să fie minimă.

(C.d.p.)

3. Să se arate că nu există funcţii $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care satisfac egalitatea:

$$f(1+x) - x = x - f(1-x), \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

(C.d.p.)

Scanned with OKEN Scanner

4. Fie Ox, Oy, Oz trei semidrepte perpendiculare două cîte două și $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$ (A, B, $C \neq O$). Să se arate că triunghiul ABC este ascuțitunghic.

(C.d.p.)

Clasa a IX-a

1. Fie $a \in \mathbf{R}$. Să se arate că:

$$x^4 + y^4 + axy + 2 \geqslant 0, \quad (\forall)\, x, y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow |a| \leqslant 4.$$

L. Panaitopol, lector univ., București

2. Fie $A \subset \mathbf{R}$ și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea:

$$(*)\ f(x) - f(y) = (y - x) f(x) f(y), \quad (\forall)\, x, y \in A.$$

a) Pentru $A = \mathbf{R}$ să se arate că unica funcție cu proprietatea (*) este funcția identic nuiă.

b) Pentru $A = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ să se determine toate funcțiile cu proprietatea (*).

S. Bîrăuaș, asist. univ., Timișoara

3. Fie A' al doilea punct de intersecție al bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$ cu cercul circumscris triunghiului ABC. Să se arate că: $AA' > \dfrac{AB + AC}{2}$.

(C.d.p.)

4. Printr-un punct interior unui cerc să se construiască două coarde perpendiculare astfel încît suma lungimilor lor să fie:

a) maximă; b) minimă.

L. Panaitopol, lector univ., București

Clasa a X-a

1. Fie n un număr natural. Să se arate că:

a) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^k < 1 + \dfrac{k}{n} + \dfrac{k^2}{n^2}$, pentru orice număr natural $1 \leqslant k \leqslant n$;

b) $3^n \cdot n! > (n+1)^n$, pentru orice $n \geqslant 1$.

(C.d.p.)

2. Pe latura (BC) a triunghiului ABC se consideră punctele M și N astfel încît $MN = \dfrac{1}{n} BC$. Paralela ML la latura AB ($L \in (AC)$) se intersectează în O cu paralela NQ la latura AC, ($Q \in (AB)$). Prin O se duce paralela la latura (BC) care intersectează pe AB și AC respectiv în P și K. Să se determine poziția punctului M astfel încît suma ariilor triunghiurilor OMN, OKL și OPQ să fie minimă și calculați acest minim în funcție de n și aria triunghiului ABC.

Gh. Ivan, lector univ., Timișoara

Scanned with OKEN Scanner

3. Fie $ABCD$ un tetraedru oarecare, M mijlocul muchiei $[AB]$ și N mijlocul muchiei $[CD]$. Să se arate că un plan oarecare π ce conține punctele M și N secționează tetraedrul $ABCD$ în două poliedre de volume egale.

(C.d.p.)

4. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și M, N mijloacele laturilor opuse $[AD]$, $[BC]$. Printr-un punct arbitrar $P \in [MN]$ se duce un plan perpendicular pe dreapta MN, care taie laturile $[AB]$, $[AC]$, $[CD]$, $[BD]$ ale tetraedrului respectiv în punctele E, F, G, H.

1°. Să se demonstreze că perimetrul patrulaterului $EFGH$ nu depinde de poziția punctului P;

2°. Să se determine valoarea maximă a ariei patrulaterului $EFGH$ în funcție de latura tetraedrului $ABCD$.

A. C. Albu, lector univ., Timișoara

Clasa a XI-a

1. Fie parabola $\mathcal{P}: x - y^2 - (p+3)y - p = 0$, $p \in \mathbf{R}^*$. Să se arate că $\mathcal{P}$ intersectează axele de coordonate în trei puncte, iar cercul determinat de cele trei puncte trece printr-un punct fix.

M. Puta, lector univ., Timișoara

2. Fie A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $A = (a_{pq})$, $B = (b_{pq})$, $a \in \mathbf{C}$ astfel încît $b_{pq} = a^{p-q} \cdot a_{pq}$, $(\forall)\ p, q \in \{1, \ldots, n\}$. Să se calculeze $\det B$ în funcție de a și $\det A$.

(C.d.p.)

3. Fie P_1, P_2, $P_3 \in \mathbf{R}[X]$ trei polinoame de gradul doi și $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \max\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$. Atunci f este derivabilă dacă și numai dacă unul din cele trei polinoame le majorează pe celelalte două.

Gh. Siretchi, lector univ., București

4. a) Să se determine toate șirurile convergente (în $\mathbf{R}$) care verifică relația $x_{n+2} + x_{n+1} = x_n$ $(\forall) n \geqslant 0$.

(C.d.p.)

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n(x_n - 1)}$, unde x_n este rădăcina pozitivă a ecuației $x^n = x + n$.

E. Panaitopol, lector univ., București

Clasa a XII-a

1. Să se descrie toate grupurile G care au proprietatea că oricare ar fi un subgrup H al lui G și oricare ar fi $x, y \in G$, dacă $xy \in H$ atunci $x, y \in H$ sau $x = y^{-1}$.

(C.d.p.)

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie I un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Să se demonstreze că f este monotonă dacă și numai dacă pentru oricare $a, b \in I$ cu $a \neq b$, avem că $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)\,dt$ este cuprins între $f(a)$ și $f(b)$.

Gh. Siretchi, lector univ., București

3. Fie $A \subset \mathbf{R}$ și $f : A \to \mathbf{R}$. Să se demonstreze că mulțimea bijecțiilor $\varphi : A \to A$ care au proprietatea $f \circ \varphi = f$ formează un grup (cu operația de compunere).

Să se determine acest grup pentru

$$f : \mathbf{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}$$

și să se rezolve ecuația

$$f(x) = f(a).$$

(C.d.p.)

4. Fie $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Să se determine o funcție continuă $g_\varepsilon : [0, 1] \to \mathbf{R}$ pentru care:

$$g_\varepsilon(x) = x^3 + \varepsilon + 3 \cdot \int_0^x t^2 g_\varepsilon^2(t)\,dt,\ (\forall)\ x \in [0, 1].$$

Să se demonstreze că dacă $f : [0, 1] \to \mathbf{R}_+$ este continuă și verifică

$$f(x) \leqslant x^3 + 3 \cdot \int_0^x t^2 f^2(t)\,dt,\ (\forall)\ x \in [0, 1],$$

atunci $f(x) \leqslant \operatorname{tg} x^3$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$.

Gh. Eckstein, lector univ., Timișoara

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E : 8939* (G.M. 9/1986, pag. 358)

Determinați numerele naturale n cu proprietatea că 1001 *se divide cu* $(n + 1)$ *iar* $(n - 1)$ *se divide cu* 15.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

Soluție dată de *Ghiur Luciana*, cl. a VI-a, Șc. gen. 3 Vaslui. Deoarece $1001 = 7 \times 11 \times 13$ rezultă că divizorii lui 1001 sînt: 1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001. Deci

$$n + 1 \in \{1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001\} \text{ sau}$$

$$n \in \{0, 6, 10, 12, 76, 90, 142, 1000\} \text{ sau}$$

$$n - 1 \in \{-1, 5, 9, 11, 75, 89, 141, 999\} = A.$$

Din mulțimea A numai numărul 75 se divide cu 15. Deci $n - 1 = 75$ adică $n = 76$.

Problema E : 3944 * (G.M. 9/1986, pag. 358)

Se dă $\frac{a}{b} = 6{,}4$. *Să se calculeze* $\frac{5a + 3b}{7b - a}$.

Cristian Georgescu, elev, Pitești

Soluție. Deoarece $\frac{a}{b} = \frac{64}{10}$ rezultă că $\frac{5a + 3b}{7b - a} = \frac{5 \cdot 64 + 3 \cdot 10}{7 \cdot 10 - 64} =$

$= \frac{350}{6} = 58\frac{1}{3}$.

Soluție bună au dat: *Berceanu Adriana*, cl. a V-a, Șc. gen. 3 Alexandria; *Cosmin Mihai*, cl. a V-a, Șc. gen. 10 Tîrgoviște.

Clasa a VI-a

Problema E : 3945 * (G.M. 9/1986, pag. 358)

Se dau mulțimile:

$$A = \left\{x \in \mathbf{N} \mid x = \frac{2n + 6}{n + 1},\ n \in \mathbf{N}\right\},$$

$$B = \left\{[\sqrt{5}];\ [5, 6];\ \left[\frac{15}{2}\right]\right\},$$ *unde* $[x]$ *este partea întreagă a lui* x,

$$C = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2a + 1,\ a \in A\}.$$

Să se determine: 1) $A \cup B$; 2) $B \cap C$; 3) $A \setminus C$; 4) $B \boxtimes C$.

Ilie Florescu, Văleni, Olt

Soluție. Avem:

$$x = \frac{2n + 6}{n + 1} = \frac{2n + 2 + 4}{n + 1} = \frac{2(n + 1)}{n + 1} + \frac{4}{n + 1} = 2 + \frac{4}{n + 1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $x \in \mathbf{N}$, $2 \in \mathbf{N}$ și $n \in \mathbf{N}$ rezultă că $\frac{4}{n+1} \in \mathbf{N}$. Pentru aceasta numitorul $n+1$ trebuie să fie un divizor natural al lui 4, deci $n+1 \in \{1; 2; 4\}$, de unde $n \in \{0; 1; 3\}$ și $x \in \{3; 4; 6\}$. Prin urmare $A = \{3, 4, 6\}$, $B = \{2; 5; 7\}$ și $C = \{7; 9; 13\}$ și deci avem:

1) $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$; 2) $B \cap C = \{7\}$; 3) $A \setminus C = \{3; 4; 6\}$; 4) $B \times C = \{(2, 7); (2, 9); (2, 13); (5, 7); (5, 9); (5, 13); (7, 7); (7, 9); (7, 13)\}$.

Soluție bună au dat: *Maxim Otilia*, cl. a VI-a, Șc. gen. 1 Darabani; *Grapă Geanina*, cl. a VI-a, Șc. gen. 7 Roman.

Problema E: 8947 * (G.M. 9/1986, pag. 359)

Fie ABC un triunghi dreptunghic ($\hat{A} = 90°$ și $\hat{C} < \hat{B}$) înscris într-un cerc de centru O. Perpendiculara ridicată în O pe BC întîlnește cercul în N și prelungirea lui AB în M. Cîte grade trebuie să aibă arcul $\overset{\frown}{AN}$ pentru ca triunghiul BMC să fie echilateral!

Ion Z. Predescu, profesor, Rast, Dolj

Soluție. Triunghiul ABC fiind dreptunghic înscris în cerc, rezultă că este înscris într-un semicerc de diametru BC. Perpendiculara în O pe BC intersectează cercul în două puncte, N și N', unde N aparține semicercului în care este înscris triunghiul ABC, iar N' aparține semicercului opus.

Dacă triunghiul BMC este echilateral rezultă că unghiurile lui sînt congruente și au fiecare cîte 60°, deci $\widehat{CBM} = 60°$. Atunci, din triunghiul dreptunghic ABC rezultă că $\widehat{ACB} = 30°$. Cum $\widehat{ACB}$ este unghi înscris în cerc, obținem că $\overset{\frown}{AB} = 60°$, (1).

Deoarece NN' este perpendiculară pe CB în centrul O al cercului, avem că $\widehat{NOB} = \widehat{N'OB} = 90°$, de unde $\overset{\frown}{NB} = \overset{\frown}{N'B} = 90°$, (2).

Din relațiile (1) și (2) obținem $\overset{\frown}{NA} = 90° - 60° = 30°$ și $\overset{\frown}{N'A} = 90° + 60° = 150°$.

Deci $\overset{\frown}{NA}$ trebuie să aibă 30° sau 150°, după cum N este sau nu de aceeași parte cu A față de diametrul BC al cercului.

Soluție bună au dat: *Eădu Mihaela*, cl. a VI-a, Șc. gen. 10 Slatina; *Dobran Cristina*, cl. a VI-a, Șc. gen. 14 Satu Mare.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VII-a

Problema E : 8951* (G.M. 9/1986, pag. 359)

În triunghiul oarecare ABC se prelungesc medianele AA_1, BB_1, CC_1 cu segmentele $A_1M = AG$, $B_1N = BG$, $C_1P = CG$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se demonstreze că :

a) $A_{\Delta MNP} = \frac{9}{4} A_{\Delta ABC}$;

b) $A_{\Delta ANP} + A_{\Delta BMP} + A_{\Delta CMN} = \frac{1}{3} A_{\Delta MNP}$.

Vasilica Udroiu, profesoară, Roșiori de Vede

Soluție. a) G fiind centrul de greutate al triunghiului, avem :

$$\frac{GA}{AA_1} = \frac{GB}{BB_1} = \frac{GC}{CC_1} = \frac{2}{3}, \quad (1).$$

Din construcție, deoarece $A_1M \equiv AG$, rezultă $GM \equiv AA_1$; analog $GN \equiv BB_1$ și $GP \equiv CC_1$, deci (1) devine :

$$\frac{GA}{GM} = \frac{GB}{GN} = \frac{GC}{GB} = \frac{2}{3}.$$

Din $\frac{GA}{GM} = \frac{GB}{GN} = \frac{2}{3}$ și $\widehat{AGM} \equiv \widehat{MGN}$, rezultă că $\Delta ABG \sim \Delta MGN$ și deci $\frac{AB}{MN} = \frac{2}{3}$, (2). Analog demonstrăm că $\Delta AGC \sim \Delta MGP$, de unde $\frac{AC}{PM} = \frac{2}{3}$, (3) și $\Delta BGC \sim \Delta PGN$, de unde $\frac{BC}{PN} = \frac{2}{3}$, (4). Din (2), (3) și (4) deducem că $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, raportul lor de asemănare fiind $\frac{2}{3}$.

Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare, deci

$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta MNP}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \text{ deci } A_{\Delta MNP} = \frac{9}{4} A_{\Delta ABC}.$$

b) Vom folosi teoremele :

T_1 : Mediana unui triunghi împarte triunghiul în două triunghiuri de arii egale ;

T_2 : Aria unui triunghi este egală cu semiprodusul a două laturi înmulțit cu sinusul unghiului dintre ele.

Conform T_1 obținem :

$$\begin{aligned} &A_{\Delta AGB_1} = A_{\Delta CGB_1} ; \; A_{\Delta BGA_1} = A_{\Delta CGA_1} ; \; A_{\Delta AGC_1} = A_{\Delta BGC_1} ; \\ &A_{\Delta ANB_1} = A_{\Delta CNB_1} ; \; A_{\Delta CMA_1} = A_{\Delta BMA_1} ; \; A_{\Delta APC_1} = A_{\Delta BPC_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform T_2 și folosind relațiile (1), avem:

$$A_{\Delta AGC_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AA_1 \cdot \frac{1}{3} CC_1 \cdot \sin \widehat{AGC_1} = \frac{1}{9} AA_1 \cdot CC_1 \cdot \sin \widehat{AGC_1}$$

și

$$A_{\Delta CGA_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} CC_1 \cdot \frac{1}{3} AA_1 \cdot \sin \widehat{CGA_1} = \frac{1}{9} AA_1 \cdot CC_1 \cdot \sin \widehat{CGA_1}.$$

Dar $\widehat{AGC_1} \equiv \widehat{CGA_1}$ ca unghiuri opuse la vîrf, deci $A_{\Delta AGC_1} = A_{\Delta CGA_1}$. Analog obținem egalitățile:

$$A_{\Delta AGC_1} = A_{\Delta CGA_1}; \quad A_{\Delta BGC_1} = A_{\Delta CGB_1}; \quad A_{\Delta AGB_1} = A_{\Delta BGA_1};$$
$$A_{\Delta AGP} = A_{\Delta CGM}; \quad A_{\Delta AGN} = A_{\Delta BGM}; \quad A_{\Delta BGP} = A_{\Delta CGN}. \qquad (6)$$

Din relațiile (5) și (6) obținem șirurile de egalități:

$$A_{\Delta AGC_1} = A_{\Delta AGB_1} = A_{\Delta BGC_1} = A_{\Delta BGA_1} = A_{\Delta CGA_1} = A_{\Delta CGB_1} \overset{not}{=} S_1;$$

$$A_{\Delta APC_1} = A_{\Delta BPC_1} = A_{\Delta BMA_1} = A_{\Delta CMA_1} = A_{\Delta CNB_1} = A_{\Delta ANB_1} \overset{not}{=} S_2.$$

Conform T_2, putem calcula:

$$A_{\Delta APC_1} = \frac{1}{2} \cdot PC_1 \cdot AC_1 \cdot \sin \widehat{AC_1P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} CC_1 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot \sin \widehat{AC_1P} =$$

$$= \frac{1}{6} CC_1 \cdot AP \cdot \sin \widehat{AC_1P}$$

și

$$A_{\Delta BGC_1} = \frac{1}{2} GC_1 \cdot BC_1 \cdot \sin \widehat{BC_1G} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} CC_1 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot \sin \widehat{BC_1G} =$$

$$= \frac{1}{12} CC_1 \cdot AP \cdot \sin \widehat{BC_1G}.$$

Comparînd aceste două arii, ținînd seama că $\widehat{AC_1P} \equiv \widehat{BC_1G}$ ca unghiuri opuse la vîrf, obținem că $A_{\Delta APC_1} = 2A_{\Delta BGC_1}$, deci $S_2 = 2S_1$.

Observăm că $A_{\Delta ABC} = 6S_1$ și $A_{APBMCN} = 6S_1 + 6S_2 = 18S_1 = 3A_{\Delta ABC}$, de unde

$$A_{\Delta ANP} + A_{\Delta BMP} + A_{\Delta CMN} = A_{APBMCN} - A_{\Delta AMPN}$$

și ținînd seama de punctul a) obținem:

$$A_{\Delta ANP} + A_{\Delta BMP} + A_{\Delta CMN} = 3A_{\Delta ABC} - \frac{9}{4} A_{\Delta ABC} = \frac{3}{4} A_{\Delta ABC}$$

de unde

$$A_{\Delta ANP} + A_{\Delta BMP} + A_{\Delta CMN} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} A_{\Delta MNP} = \frac{1}{3} A_{\Delta MNP}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție bună au dat: *Dabija Daniela*, cl. a VII-a, Șc. gen. 3 Galați; *Alexe Daniela*, cl. a VII-a, Șc. gen. 3 Însurăței.

Clasa a VIII-a

Problema E: 8960 * (G.M. 9/1986, pag. 360)

Pe planul pătratului $ABCD$ de latură $2a (a>0)$ în B, C și D se ridică perpendicularele d_1, d_2 și d_3 pe care se consideră (în același semispațiu) segmentele $BN=a$, $CM=2a$ și $DP=a$.

1) *Să se arate că planul determinat de punctele M, N și P conține punctul A.*

2) *Să se afle aria triunghiului MQS ($MN \cap BC=\{Q\}$, $MP \cap DC=\{S\}$).*

Maria Chiorean, profesoară, Turda

Soluție. 1) Fie E mijlocul segmentului PN și O mijlocul segmentului BD. Deoarece $PNBD$ este dreptunghi rezultă că $EO=BN=a$. În plus $AO=OC$ și $EO \parallel MC$, deci punctele M, E și A sînt coliniare. Deoarece dreapta EM aparține planului PMN rezultă că A aparține planului PMN.

2) Deoarece $BQ=DS$ rezultă că punctele S, A și Q sînt coliniare. În plus $SQ \parallel BD$ și BD este linie mijlocie în triunghiul SCQ. Rezultă că $SQ=4a\sqrt{2}$. În triunghiul dreptunghic MCA avem $MA=2a\sqrt{3}$. Deoarece $MC \perp (SCQ)$ și $CA \perp SQ$ rezultă conform teoremei celor trei perpendiculare că $MA \perp SQ$. Rezultă că $A_{MSQ}=\frac{1}{2} SQ \cdot AM=4a^2\sqrt{6}$.

Soluție bună au dat: *Tudor Andrei*, cl. a IX-a, Lic. 5 Cîmpina; *Badea Luminița*, cl. a IX-a, Lic. ind. 2 Roșiori de Vede.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 20370* (G.M.9/1986, pag. 361)

Să se rezolve în $\mathbb{R}^3$ sistemul:

$$\begin{cases} x-9z^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ 6y-x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ 15z-4y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2. \end{cases}$$

Generalizare.

C. C. Florea, profesor, Cîmpina

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Sistemul se scrie echivalent succesiv astfel:

$$\begin{cases} 4x - 36z^2 = 25 \\ 24y - 4x^2 = 1 \\ 60z - 16y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 25 + 36z^2 \\ 24y = 1 + 4x^2 \\ 60z = 9 + 16y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 60z = 25 + 36z^2 - 60z \\ 24y - 4x = 1 + 4x^2 - 4x \\ 60z - 24y = 9 + 16y^2 - 24y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 60z = (5 - 6z)^2 \\ 24y - 4x = (1 - 2x)^2 \\ 60z - 24y = (3 - 4y)^2. \end{cases}$$

Prin adunarea ecuațiilor din ultimul sistem obținem $0 = (5 - 6z)^2 + (1 - 2x)^2 + (3 - 4y)^2$.

Deoarece $x, y, z \in \mathbf{R}$ rezultă că $5 - 6z = 0$, $1 - 2x = 0$, $3 - 4y = 0$, deci $x = \frac{5}{6}$, $y = \frac{1}{2}$ și $z = \frac{3}{4}$.

Generalizare. Se consideră sistemul de forma

$$\begin{cases} 2a_1b_1x - b_3^2z^2 = a_3^2 \\ 2a_2b_2y - b_1^2x^2 = a_1^2 \\ 2a_3b_3z - b_2^2y^2 = a_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1b_1}{2}x - \left(\frac{b_3}{2}\right)^2 z^2 = \left(\frac{a_3}{2}\right)^2 \\ \frac{a_2b_2}{2}y - \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 x^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \\ \frac{a_3b_3}{2}z - \left(\frac{b_2}{2}\right)^2 y^2 = \left(\frac{a_2}{2}\right)^2, \end{cases}$$

Demonstrația este similară.

Soluție bună au dat: *Maftei Constantin*, cl. a IX-a, Lic. ind. 1 Vaslui; *Verzea Valentin*, cl. a IX-a, Lic. „I. Slavici" Arad.

Clasa a X-a

Problema 20736* (G.M. 4/1986, pag. 136)

Se consideră ecuația:

$$2x^2 + 1985y^2 = 2z^2 + 1.$$

Demonstrați că există o infinitate de triplete de forma $(x, y, z) \in \mathbf{N}^3$ *care sînt soluții ale ecuației.*

Liviu Pîrșan

Soluție. Dacă înlocuim în ecuație $x = a - 1$ și $z = a + 1$, $(a \in \mathbf{N}^*)$, obținem:

$$2(a - 1)^2 + 1985y^2 = 2(a + 1)^2 + 1 \text{ sau}$$

$$1985y^2 = 8a + 1, \quad (1).$$

Dacă $y = 4p + 1$ (cu $p \in \mathbf{N}$) atunci (1) devine

$$1985(16p^2 + 8p + 1) = 8a + 1 \text{ sau}$$

$$1985(16p^2 + 8p) + (1985 - 1) = 8a,$$

de unde:

$$a = 1985p(2p + 1) + 248.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că avem o infinitate de soluții ale ecuației, de forma (x, y, z), unde:

$$\begin{cases} x = 1985p(2p+1) + 247, \\ y = 4p + 1, \\ z = 1935p(2p+1) + 249, \text{ cu } p \in N. \end{cases}$$

Problema 20792* (G.M. 6/1983, pag. 220)

Să se arate că numărul

$$1984 \cdot 1986^{1985} - 1985 \cdot 1986^{1984} + 1$$

este divizibil cu 1985^2.

Ioana Andreea Ene, elevă, București

Soluție. Este cunoscută egalitatea:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},$$

adevărată pentru orice x real, $x \neq 1$.

Dacă $x \in Z$, $x \neq 1$, atunci $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} \in Z$ și prin urmare $\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \in Z$. Aceasta înseamnă că numărul întreg $(x-1)^2$ divide numărul întreg $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$.

Pentru $x = 1986$ și $n = 1984$ obținem exact enunțul problemei.

Soluție bună au dat: *Șerban Lelia*, cl. a X-a, Lic. „Ienăchiță Văcărescu" Târgoviște; *Sofia Cosmin*, cl. a X-a, Lic. mat. fiz. 1 București.

Clasa a XI-a

Problema 20819* (G.M. 9/1983, pag. 361)

În planul raportat la sistemul cartezian ortogonal de coordonate xOy se consideră punctele $A(1; 0)$ *și* $B(0; 1)$. *Prin aceste puncte se duce câte o dreaptă mobilă care intersectează dreapta de ecuație* $x = y$ *respectiv în C și D. Fie* $A' = pr_{Ox} C$, $B' = pr_{Oy} D$ *și M un punct mobil pe dreapta de ecuație* $x = y$, *iar N și P mijloacele segmentelor* (MA'), *respectiv* (MB'). *Se cere locul geometric al mijlocului segmentului* (NP).

Gerhard Servatius, profesor, Codlea

Soluție: Coordonatele punctului D se obțin rezolvind sistemul $\begin{cases} y = x \\ y = nx + 1. \end{cases}$ (vezi fig. 1).

Rezultă $D\left(\frac{1}{1-n}; \frac{1}{1-n}\right)$ și apoi $B'\left(0; \frac{1}{1-n}\right)$.

Coordonatele punctului C se obțin rezolvind sistemul $\begin{cases} y = x \\ y = m(x-1). \end{cases}$

Rezultă $C\left(\frac{m}{m-1}; \frac{m}{m-1}\right)$ și apoi $A'\left(\frac{m}{m-1}; 0\right)$.

Fie $M(\alpha; \alpha)$ unde α este un parametru real. După calcule obținem:

$$N\left(\frac{m\alpha + m - \alpha}{2(m-1)}; \frac{\alpha}{2}\right); P\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{1 + \alpha - n\alpha}{2(1-n)}\right);$$

$$Q\left(\frac{2m\alpha - 2\alpha + m}{4(m-1)}; \frac{1 + 2\alpha - 2n\alpha}{4(1-n)}\right);$$

Scanned with OKEN Scanner

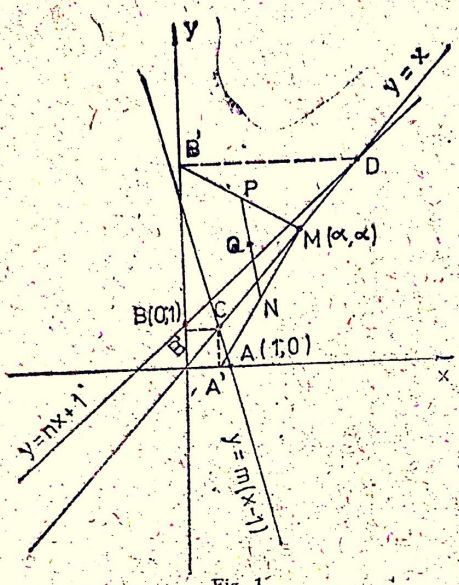


Fig. 1

Deci, pentru stabilirea locului geometric cerut, vom elimina parametrul α între relațiile

$$\begin{cases} x = \dfrac{2m\alpha - 2\alpha + m}{4(m-1)} \\ y = \dfrac{1 + 2\alpha - 2n\alpha}{4(1-n)}. \end{cases}$$

Ținînd seama de $n = \dfrac{y-1}{x}$ și $m = \dfrac{y}{x-1}$, după înlocuiri obținem

$$\frac{4x(y-x+1) - y}{2(y-x+1)} = \frac{4y(x-y+1) - x}{2(x-y+1)},$$

de unde, după calcule, găsim

$$(x-y)(4x^2 + 4y^2 - 8xy + x + y - 5) = 0.$$

Acest rezultat arată că locul geometric al lui Q este inclus în reuniunea dintre dreapta de ecuație $y = x$ și conica de ecuație $4x^2 + 4y^2 - 8xy + x + y - 5 = 0$.

I) Să vedem în ce condiții Q descrie dreapta de ecuație $y = x$. În acest caz rezultă că MQ este mediană în triunghiul $A'MB'$. Fie Q' piciorul acestei mediane. Deci $Q' \in (A'B')$ și $(A'Q) \equiv (QB')$. Atunci, în triunghiul dreptunghic $A'OB'$, OQ' este mediană și bisectoare, deci triunghiul $A'OB'$ este isoscel, deci $(A'O) \equiv (OB')$. Notînd cu E al patrulea vîrf al pătratului $A'OB'E$, rezultă că E se află pe prima bisectoare a axelor, și se proiectează pe Ox în A' și pe Oy în B'. Conform enunțului problemei rezultă $E \equiv C \equiv D$. Deci în cazul particular cînd dreptele mobile se intersectează chiar pe prima bisectoare a axelor, punctul Q descrie dreapta de ecuație $y = x$ (prima bisectoare).

II) Cînd dreptele mobile care trec prin A și B nu se întîlnesc pe dreapta $y = x$, din cele demonstrate rezultă că nici Q nu poate aparține acestei drepte, deci punctul Q va descrie conica de ecuație $4x^2 + 4y^2 - 8xy + x + y - 5 = 0$. Studiem natura acestei conice și apoi o aducem la forma canonică într-un nou reper cartezian. Avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -4 & \frac{1}{2} \\ -4 & 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -5 \end{vmatrix} = -4 < 0, \quad \delta = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

deci conica este o parabolă. Faptul că $\delta = 0$ ne arată că putem forma un pătrat perfect cu termenii în x și y, deci ecuația devine $(2x - 2y)^2 + x + y - 5 = 0$. Comparînd cu ecuația $Y^2 - 2pX = 0$ (forma canonică a parabolei în noile coordonate X, Y), rezultă că dreptele $X = 0$, $Y = 0$ sînt doi diametri conjugați, deci dreapta $Y = 0$ este paralelă cu axa parabolei. Pentru a determina această axă a parabolei introducem un parametru λ în paranteză și ecuația se scrie

$$(2x - 2y + \lambda)^2 - 2\lambda x + 2\lambda y - \lambda^2 + x + y - 5 = 0.$$

Determinăm acum λ astfel ca dreptele $2x - 2y + \lambda = 0$ și $(1 - \lambda)x + (1 + 2\lambda)y - \lambda^2 - 5 = 0$ să devină perpendiculare. Această condiție ne dă $\lambda = 0$. Așadar axa parabolei are ecuația $x - y = 0$, iar tangenta în vîrful parabolei are ecuația $x + y - 5 = 0$. Rezultă că

Scanned with OKEN Scanner

vîrful parabolei este punctul $V\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$. Intersectăm parabola cu axele vechiului sistem xOy pentru a determina complet poziția acesteia. Obținem următoarele 4 puncte: $\left(0; -\frac{5}{4}\right)$, $(1; 0)$; $(0; 1)$ și $\left(-\frac{5}{4}; 0\right)$. Ca să determinăm parametrul p al parabolei observăm că dacă (X, Y) este un punct al curbei în noul reper, coordonatele lui reprezintă distanțele de la acest punct la dreptele $Y = 0$ și $X = 0$, adică $Y = \frac{x-y}{2}$ și $X = \frac{x+y-5}{2}$.

Ecuația canonică a parabolei în noul reper este $Y^2 = 2pX$ și devine în vechiul reper

$$\frac{(x-y)^2}{2} = 2p\frac{x+y-5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x^2-2xy+y^2}{2} = p\sqrt{2}(x+y-5) \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 = 2p\sqrt{2}\,x +$$

$$+2p\sqrt{2}\,y - 10p\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 - 2p\sqrt{2}x - 2p\sqrt{2}\,y + 10p\sqrt{2} = 0.$$

Identificînd cu ecuația inițială a parabolei, se obține

$$-2p\sqrt{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow p = -\frac{1}{8\sqrt{2}}.$$

Deci ecuația canonică a parabolei în noul reper este

$$Y^2 - \frac{\sqrt{2}}{8}X = 0.$$

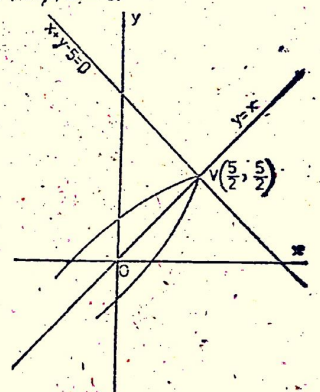


Fig. 2

N.R. Metoda folosită în această soluție pentru reducerea parabolei la forma canonică poate fi consultată în cadrul ei general în lucrarea „Geometrie analitică, proiectivă și diferențială" de *N. Mihăileanu* (E.D.P., București 1971).

Clasa a XII-a

Problema 2[illegible]* (G.M. 9/1986, pag. 364)

Fie $\mathcal{L}$ spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 3 cu coeficienți reali. Arătați că polinoamele

$$a_1(x) = x^2(x+2) - 2, \qquad a_2(x) = x(x+1)^2 - 1,$$

$$a_3(x) = x^2(x+1) + 1, \qquad a_4(x) = x(x+2)^2 + 2$$

formează o bază a lui $\mathcal{L}$.

Determinați coordonatele polinomului $p(x) = x^3 \in \mathcal{L}$ în baza $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Aurel Ene, profesor, Rm. Vîlcea

Soluție. Deoarece $\{1, x, x^2, x^3\}$ este o bază a lui $\mathcal{L}$ rezultă că spațiul are dimensiunea 4 și va fi suficient să demonstrăm că polinoamele a_1, a_2, a_3, a_4 sînt liniar independente. Fie deci $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ astfel încît:

$$A \cdot a_1(x) + B \cdot a_2(x) + C \cdot a_3(x) + D \cdot a_4(x) = 0, \ (\forall)x \in \mathbf{R}, \qquad (1)$$

Problema se reduce la a arăta că din (1) rezultă $A = B = C = D = 0$. Într-adevăr, (1) este echivalentă cu

$$A(x^3 + 2x^2 - 2) + B(x^3 + 2x^2 + x - 1) + C(x^3 + x^2 + 1) + D(x^3 + 4x^2 + 4x + 2) =$$

$$= 0, \ (\forall)x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x^3(A + B + C + D) + x^2(2A + 2B + 4D) + x(B + C + 4D) - (2A +$$

$$+ B - C - 2D) = 0, \ (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

Rezultă sistemul liniar:

$$A + B + C + D = 0, \ 2A + 2B + 4D = 0$$

$$B + C + 4D = 0, \ 2A + 2B - C - 2D = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinantul sistemului este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Făcînd calculele obținem $\Delta = 14$.
Rezultă că sistemul liniar are numai soluția $A = B = C = D = 0$.

Pentru determinarea coordonatelor α, β, γ, δ ale polinomului $p(x) = x^3$ în baza $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ avem:

$p(x) = \alpha a_1(x) + \beta a_2(x) + \gamma a_3(x) + \delta a_4(x)$ sau

$x^3 = \alpha(x^3 + 2x^2 - 2) + \beta(x^3 + 2x^2 + x - 1) + \gamma(x^3 + x^2 + 1) + \delta(x^3 + 4x^2 + 4x + 2)$, sau

$x^3 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)x^3 + (2\alpha + 2\beta + \gamma + 4\delta)x^2 + (\beta + 4\delta)x + (-2\alpha - 2\beta + \gamma + 2\delta)$.

Deci rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \\ 2\alpha + 2\beta + \gamma + 4\delta = 0 \\ \beta + 4\delta = 0 \\ -2\alpha - \beta + \gamma + 2\delta = 0, \end{cases}$$

de unde $\alpha = -\frac{5}{3}$, $\beta = \frac{8}{3}$, $\gamma = \frac{2}{3}$, $\delta = -\frac{2}{3}$.

Soluție bună a dat *Birsan Dorian*, cl. a XII-a, Lic. ind. chimie, Victoria.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

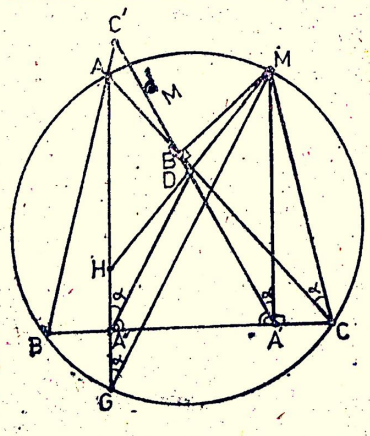
Problema C : 627(G.M. 9/1986, pag. 366)

Fie ABC un triunghi și H ortocentrul său. Considerăm un punct M mobil pe cercul circumscris triunghiului ABC și notăm cu d_M dreapta lui Simson corespunzătoare punctului M și triunghiului ABC. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție dintre dreptele d_M și HM.

Marius Șomodi, elev, București

Soluție dată de *Adela Vrăciu*, elevă cl. a IX-a, Lic. mat. fiz. nr. 4 București.
Introducem următoarele notații (v. fig.): $d_M \cap BC = \{A'\}$; $d_M \cap AC = \{B'\}$; $d_M \cap AB = \{C'\}$; $AH \cap BC = \{A''\}$; cercul $(ABC) \cap (AH = \{G\}$; $m(\widehat{ACM}) = \alpha$. Fie de asemenea D mijlocul lui $[HM]$. Vom arăta că $D \in d_M$. Folosind patrulaterul inscriptibil $MB'A'C$ rezultă

$$m(\widehat{B'A'M}) = \alpha, \qquad (1).$$



În trapezul dreptunghic $HA''A'M$ mediatoarea lui $[A''A']$ este linie mijlocie, deci trece prin D. Rezultă că triunghiul $DA''A'$ este isoscel cu $\hat{A}'' \equiv \hat{A}'$. Deoarece A'' este mijlocul lui $[HG]$ (simetricul ortocentrului H față de BC este tocmai G) deducem că $[A''D]$ este linie mijlocie în triunghiul HGM, deci $A''D \parallel GM$. Atunci $m(\widehat{HA''D}) = m(\widehat{HGM}) = \alpha$. Deoarece complementele unghiurilor congruente $\hat{A}'$ și $\hat{A}''$ din triunghiul isoscel $DA''A'$ sînt unghiurile $\widehat{HA''D}$

respectiv $\widehat{DA'M}$, deducem că

$$m(\widehat{DA'M}) = m(\widehat{HA''D}) = \alpha, \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă $\widehat{B'A'M} \equiv \widehat{DA'M}$, ceea ce înseamnă că punctul D aparține dreptei $d_M = A'B'$.

În acest fel, problema s-a redus la găsirea locului geometric al mijloacelor segmentului $[HM]$, cînd M descrie cercul (ABC). După cum se știe acest loc este cercul lui *Euler* asociat triunghiului ABC.

Problema C : 636 (G.M. 10/1986)

Să se găsească $\alpha, \beta \in (0°, 180°)$, *știind că*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg} 1°}{1 + \operatorname{tg} 1°} \text{ și } \operatorname{tg}\beta = \frac{(1 + \operatorname{tg} 1°)(1 + \operatorname{tg} 2°) - 2}{(1 - \operatorname{tg} 1°)(1 - \operatorname{tg} 2°) - 2}.$$

Cristinel Mortici, elev, Tîrgoviște

Soluție dată de *Adela Vraciu*, cl. a IX-a, Lic. mat. fiz. 4 București.

Vom folosi formulele:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}, \quad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Avem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg} 1°}{1 + \operatorname{tg} 1°} = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 1°}{1 + \operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 45°} = \operatorname{tg}(45° - 1°) = \operatorname{tg} 44°.$$

Cum $\alpha \in (0, 180°)$, rezultă $\alpha = 44°$. De asemenea:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(1 + \operatorname{tg} 1°)(1 + \operatorname{tg} 2°) - 2}{(1 - \operatorname{tg} 1°)(1 - \operatorname{tg} 2°) - 2} = \frac{\operatorname{tg} 1° + \operatorname{tg} 2° + \operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 2° - 1}{-\operatorname{tg} 1° - \operatorname{tg} 2° + \operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 2° - 1} =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg} 1° + \operatorname{tg} 2°) - (1 - \operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 2°)}{-(\operatorname{tg} 1° + \operatorname{tg} 2°) - (1 - \operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 2°)} = -\frac{\dfrac{\operatorname{tg} 1° + \operatorname{tg} 2°}{1 - \operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 2°} - 1}{\dfrac{\operatorname{tg} 1° + \operatorname{tg} 2°}{1 - \operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 2°} + 1} =$$

$$= \frac{-\operatorname{tg} 3° + 1}{\operatorname{tg} 3° + 1} = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 3°}{1 + \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 3°} = \operatorname{tg}(45° - 3°) = \operatorname{tg} 42°.$$

Cum $\beta \in (0°, 180°)$, rezultă $\beta = 42°$.

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

65. Citul a două numere este 9. Primul număr mărit cu 37 este de 8 ori mai mare decît al doilea număr mărit cu 5. Să se afle cele două numere naturale.

Georgeta Suditu, învățătoare, Boldești-Scăieni, Prahova

66. Un strungar lucrează 5 piese pe oră iar un coleg al său lucrează 6 piese pe oră. În cîte ore cei doi strungari fac 330 piese dacă lucrează împreună?

* * *

67. Dănuț are 8 cuburi roșii, galbene și albastre. Cîte cuburi roșii și cîte albastre are, dacă are 2 cuburi galbene? Găsiți toate posibilitățile.

Rozalia Pop, învățătoare, Ocna Silvaniei, Sălaj

Scanned with OKEN Scanner

68. Găsiți numerele de forma $\overline{abcd}$, în care sînt îndeplinite condițiile: $a - b = b - c = 2$ și $c + d = a$.

Eliza Morteanu și *Silviu Morteanu*, elevi, Curtea de Argeș

69. Știind că într-o înmulțire, deînmulțitul se termină în 197, iar produsul în 832, care sînt ultimele trei cifre ale înmulțitorului?

Daniela Berechet și *Florian Berechet*, învățători, Mioveni, Argeș

70. Florin citește timp de o săptămînă o carte care are 161 de pagini, astfel: luni un număr de pagini, apoi în fiecare zi cu o pagină mai mult decît în precedenta. Cîte pagini citește Florin în fiecare zi a săptămînii?

Gh. Vicol-Țureanu, învățător,

71. Mărind de 6 ori suma a două numere obținem 180. Să se afle cele două numere, știind că diferența dintre ele este 4.

Georgeta Suditu, învățătoare, Boldești-Scăieni, Prahova

72. Determinați cifrele a și b din egalitatea:

$$5 + \overline{ab} \times 8 = \overline{aa}.$$

Nicoleta Predescu, învățătoare, Rast, Dolj

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9227. Reconstituiți adunarea

$$\begin{array}{r} \text{OTTO} + \\ \text{ANNA} \\ \hline \text{ANTON} \end{array}$$

(Revista Alpha, R.D.G.)

E : 9228*. Găsiți numerele de forma $\overline{ab}$ și $\overline{cd}$ care verifică egalitatea:

$$\overline{ab} - \overline{cd} = a + b + c + d.$$

Liviu Pîrșan

E : 9229*. Să se afle $a \in \mathbb{N}$, care verifică simultan:

$$1)\ \frac{1}{9} < \frac{1}{a} < \frac{1}{2};\quad 2)\ \frac{2}{13} < \frac{2}{a-1} \leqslant \frac{2}{5};\quad 3)\ \frac{2}{11} < \frac{3}{3a-5} < \frac{1}{3}.$$

Ștefan Țifui, profesor, Grințieș, Neamț

E : 9230. Să se determine cifrele a și b din înmulțirea $\overline{aa} \times \overline{bb} = \overline{b8b}$, $(a, b \neq 0)$.

Ion Z. Predescu, profesor, Rast, Dolj

E : 9231. Determinați numerele naturale care verifică egalitatea

$$\overline{aba}^c = \overline{abcbcba}$$

în sistemul zecimal.

Aurel Doboșan, profesor, Lugoj

Scanned with OKEN Scanner

E : 9232*. Determinați numerele naturale x, y, z astfel încît $x \lhd y \lhd z$ și $xyz = 10000$.

* * *

Clasa a VI-a

E : 9233. În triunghiul ABC, unghiul $\hat{C}$ este media aritmetică a celorlalte două unghiuri, iar unghiul $\hat{A}$ este cît unghiul $\hat{B}$ și jumătate din unghiul $\hat{C}$ la un loc. Pe înălțimea AD ($D \in BC$) se consideră punctul E. Să se demonstreze că $BE \perp AC$ dacă și numai dacă $2 \cdot DE = AC$.

Maria Vizuroiu și *Nicolae Vizuroiu*, profesori, Pitești

E : 9234*. Să se determine toate numerele naturale x, y, z pentru care $xy + yz + zx = 11$. (Presupunem $x \leqslant y \leqslant z$).

Aurel Ene, profesor, Rm. Vîlcea

E : 9235*. Fie ABC un triunghi oarecare. Se notează cu E intersecția bisectoarei unghiului ABC cu perpendiculara în C pe bisectoarea unghiului ACB, cu F intersecția bisectoarei unghiului ACB cu perpendiculara în B pe bisectoarea unghiului ABC și cu D intersecția dreptelor CE și BF. Să se demonstreze că :

1) Punctele A, E și F sînt coliniare ;

2) Dacă $AE \equiv AF$, atunci triunghiul ABC este isoscel ($AB \equiv AC$) ;

3) DEF este un triunghi echilateral dacă și numai dacă ABC este triunghi echilateral. (În legătură cu problema IV de la faza locală a Olimpiadei de Matematică, București 1987).

Irina Albu, elevă, București

E : 9236*. Bisectoarele unghiurilor B și C ale triunghiului ABC, intersectează paralela prin A la BC în M și N.

1) Demonstrați că :

a) patrulaterul $BCMN$ este trapez ;

b) trapezul $BCMN$ este dreptunghic dacă și numai dacă $A_1C \equiv AB$ sau $A_1B \equiv AC$, unde A_1 este proiecția punctului A pe dreapta BC.

2) Stabiliți o condiție necesară și suficientă ca trapezul $BCMN$ să fie isoscel.

Vasilica Udroiu, profesoară, Roșiori de Vede

E : 9237. În triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90°$) ducem înălțimea AD și mediana AE. Din B ducem perpendiculara pe AE și fie F piciorul acestei perpendiculare. Să se demonstreze că punctele A, B, D și F sînt vîrfurile unui trapez isoscel.

Ion Diaconu, profesor, Piatra Neamț

E : 9238. Să se arate că dacă a, b, c, d sînt numere întregi distincte și p un număr prim, ecuația

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = p$$

nu are soluții întregi.

Constantin Armeanu, elev, București

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VII-a

E : 9239. Să se arate că dacă $x, y \in \mathbf{R}$ și $6(x^2 + y^2) = 13xy$, atunci

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} = 5\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}.$$

C. Ionescu-Țiu

E : 9240*. Considerăm sumele

$$S_n = \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm n,$$

unde $n \in \mathbf{N}^*$, iar semnele $+$ și $-$ se iau în toate modurile posibile.

a) Să se arate că $|S_n| \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ și pentru orice sumă S_n.

b) Câți termeni are suma alternată $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots - (n-1) + n$, știind că $S_n = 1987$?

(Concursul de matematică, etapa județeană, Giurgiu, 1987).

Ionel Tudor, profesor, Călugăreni, Giurgiu și *Mircea Trifu*, inspector școlar, Giurgiu

E : 9241. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right).$$

Pe baza acestui rezultat să se calculeze suma:

$$S = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

și să se arate că această sumă este mai mică decît $\dfrac{1}{3}$, oricare ar fi $n \geqslant 1$, $n \in \mathbf{N}$.

* * *

E : 9242*. Fie $f : \mathbf{R} \to [0, 6]$ o funcție crescătoare astfel încît $f(2) = 0$. Să se determine $f(-17)$.

Aurel Ene, profesor, Rm. Vîlcea

E : 9243. Rezolvați inecuația:

$$\left|\sqrt{1 + \frac{1+x^2}{2x}} - \sqrt{1 - \frac{1+x^2}{2x}}\right| \geqslant \sqrt{2\,|x|}.$$

Petre Simion, profesor, București

E : 9244*. Pe latura AB a unui triunghi dreptunghic ABC cu $AB \perp AC$ se consideră un punct M oarecare, iar pe latura AC un punct N astfel

încît $\widehat{AMN} \equiv \widehat{ACB}$. Să se afle:
1. locul geometric al mijlocului segmentului MN;
2. locul geometric al piciorului perpendicularei din A pe MN.

Alexandru Oțel, profesor, Brașov

Clasa a VIII-a

E : 9245*. Să se rezolve în numere naturale ecuația:

$$1 + x + x^2 + x^3 = y^3.$$

Lucian Tuțescu, Craiova

E : 9246. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și $AC \cap BD = \{O\}$. Fie M un punct pe perpendiculara ridicată în O pe planul patrulaterului. Arătați că $m(\widehat{AMC}) = 90°$ dacă și numai dacă $m(\widehat{BMD}) = 90°$.

Mihaela Berindeanu, profesoară, București

E : 9247*. În ipoteza că numerele reale a, b, c satisfac simultan relațiile: $x \neq -a$; $x \neq -b$; $x = -c$; $c \geq a \geq b$, să se demonstreze că ecuația $\frac{x}{x+a} + \frac{x}{x+b} = \frac{x}{x+c}$ are toate rădăcinile reale.

Alexandru Szörös, profesor, Drobeta-Tr. Severin

E : 9248*. Fie triunghiurile ABC și BCD situate în plane perpendiculare. Fie $M \in BC$ și $N \in CD$ astfel încît $MN \parallel BD$ și $AN \perp DC$. Dacă $AB = 15$cm, $AC = 20$cm, $BC = 25$cm, $AM = 12$cm, $AN = 13$cm, să se afle DC.

Alexandru Toporan, profesor, Orșova

E : 9249. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a - b = c \\ \dfrac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Damian Marinescu, profesor, Târgoviște

E : 9250. Să se afle valoarea fracției $\frac{3a - 2b}{2a^2 + 3b^2 + 5ab}$ știind că $0 < a < b$ și $3a^2 + 2b^2 = 5ab$.

Virgiliu Caibăr, profesor, Târgoviște

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G. : 55. Să se arate că dacă $a + b > 0$ atunci

$$\frac{a^5 + b^5}{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4} \geqslant \frac{a + b}{5}.$$

Lucian Tuțescu, profesor, Craiova

O.G. : 56. Fie $ABCD$ un patrulater convex și M un punct din planul său.

a) Să se afle locul geometric al punctului M, pentru care suma $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ este constantă;

b) Să se precizeze poziția lui M, pentru care suma $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ este minimă.

Mircea Bîrsan, elev, Iași

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21205*. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[4]{15ax - 3ax^2 - 12a} + \sqrt[4]{5ax - ax^2 - 6a} = \sqrt[4]{20ax - 4ax^2 - 18a},$$

unde a este un parametru real.

Dumitru Acu, lector univ., Sibiu

21206*. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$), $\mathcal{C}$ cercul său circumscris, D mijlocul arcului $\overset{\frown}{BC}$, $D \neq A$ și $M \in (BC)$ arbitrar. Fie N al doilea punct de intersecție al dreptei DM cu cercul $\mathcal{C}$ și $\{P\} = MN \cap AB$, iar $\{Q\} = MN \cap AC$. Să se arate că patrulaterul $APMQ$ este paralelogram.

Gheorghe Szöllösy, profesor, Sighetu-Marmației

21207. Într-un triunghi oarecare ABC se duce mediana (AD) și fie E, F mijloacele laturilor (AB), respectiv (AC). Notăm cu $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor $\widehat{BDA}$, respectiv $\widehat{ADC}$. Se consideră intersecțiile: $\{O\} = AD \cap MN$, $\{P\} = AB \cap FO$ și $\{R\} = AC \cap EO$. Să se arate că $(PR) = (AD)$.

Nicolae Oprea, profesor, Livada, Satu-Mare

21208. Fie M o mulțime finită de numere reale pozitive și $f : M \to M$ o funcție bijectivă cu proprietatea $f(x) \cdot f^{-1}(x) = x^2$, $(\forall) x \in M$. Să se arate că $f = 1_M$.

Ion Nedelcu, profesor, Drăgănești-Vlașca

Scanned with OKEN Scanner

21209. Fie $ABCD$ un pătrat fix în plan și un pătrat $BEFG$ din același plan, la fel orientat ca primul, care se rotește în jurul punctului B. Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor AG și DF.

Gh. Neagu, profesor, Bacău

21210. Fie dreptunghiul $ABCD$ și $M \in AD$, $N \in DC$ astfel încît $\frac{AM}{AD} = \frac{DN}{DC}$, (1). Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului (MN), cînd punctele M și N se mișcă pe laturile dreptunghiului păstrînd egalitatea de rapoarte (1). (Generalizare).

Ion Tomoioagă, profesor, Sighetu-Marmației

21211*. În triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$, $m(\hat{A}) = 80°$. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{ACO}$, $\widehat{ABO}$ intersectează dreptele BO și CO în D, respectiv E (O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC). Să se arate că triunghiul ADE este echilateral.

Doru Isac, profesor, Sibiu

Clasa a X-a

21212*. Să se arate că în orice triunghi ABC avem

$$7a^2 + b^2 + 28S \leqslant 10ab + 10ac + c^2$$

unde a, b, c sînt lungimile laturilor, iar S aria triunghiului. Cînd are loc egalitatea?

C. Caragea, profesor, Constanța

21213. Să se demonstreze că în orice triunghi avem inegalitatea

$$aA + bB + cC \geqslant \frac{(b + c)A + (a + c)B + (a + b)C}{2},$$

notațiile fiind cele obișnuite.

Bogdan Romilă, elev, Iași

21214. Fie un poligon $A_1A_2 \ldots A_n$ în planul α și M_i mijlocul laturii $[A_iA_{i+1}]$, $i = \overline{1, n}$, $A_{n+1} = A_1$. Fie N un punct oarecare în spațiu. Să se calculeze diferența:

$$\sum_{i=1}^{n} NA_i^2 - \sum_{i=1}^{n} NM_i^2,$$

știind că laturile poligonului sînt rădăcinile ecuației $\sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$, unde $a_i \in \mathbb{R}$ sînt cunoscute.

Dumitru Ștefan și *Mugurel Ștefan*, Oltenița

Scanned with OKEN Scanner

21215*. Dacă O este un punct în interiorul triunghiului ABC și A', B', C' celelalte intersecții ale dreptelor OA, OB, OC cu laturile triunghiului, atunci este adevărată relația

$$\frac{\sigma[OB'C']}{\sigma[AB'C']}+\frac{\sigma[OA'C']}{\sigma[BA'C']}+\frac{\sigma[OA'B']}{\sigma[CA'B']}=1.$$

Al. Oțet, profesor, Brașov

21216. Fie $\alpha\geqslant 0$ și $a_n=\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha+\ldots+\sqrt{\alpha}}}$, numărul radicalilor fiind egal cu n. Să se demonstreze că pentru orice două numere n, $k\in\mathbf{N}$ există inegalitatea:

$$\frac{k^2+\alpha}{2k-1}-a_{n+1}\geqslant\frac{1}{2k}\left(\frac{k^2+\alpha}{2k-1}-a_n\right).$$

Gabriela Bulancea, elevă, Bîrlad

21217*. Să se rezolve ecuația trigonometrică

$$(2\sin x+3)^k+(2\cos x+1)^k=2(\sin x+\cos x+2)^k,$$

unde $k\geqslant 2$ este un număr natural par.

Ghoorghe Marchitan, profesor, Suceava

21218. Printr-un punct oarecare al unei muchii dintr-un tetraedru oarecare se duc două plane de secțiune paralele cu fețele tetraedrului care nu conțin muchia respectivă. Notînd cu V_1 și V_2 volumele tetraedrelor mici formate și cu V volumul tetraedrului inițial, să se arate că:

$$\sqrt[3]{V_1}+\sqrt[3]{V_2}=\sqrt[3]{V}.$$

Andrei Gămulea, student, București

Clasa a XI-a

21219. Fie ABC un triunghi. Un punct mobil M din planul triunghiului se proiectează pe dreptele BC, CA, AB respectiv în A', B', C'. Să se găsească locul geometric al punctului M, știind că $\sigma[A'B'C']=k\sigma[ABC]$ unde $k\geqslant 0$ este dat. Discuție.
(În legătură cu problema 21055* din G.M. nr. 3/1987).

Gh. Szöllösy, profesor, Sighetu-Marmației

21220*. Fie șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$, unde

$$a_n=\frac{1^2C_{2n}^1+2^2C_{2n}^2+\ldots+n^2C_{2n}^n}{(n+1)^2C_{2n}^{n+1}+\ldots+(2n)^2C_{2n}^{2n}}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Traian Dura, profesor, Iara, Cluj

Scanned with OKEN Scanner

21221*. Să se determine funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, continue în punctul $x_0=1$, care satisfac egalitatea

$$f(4x-3)-2f(2x-1)+f(x)=x-1,(\forall)\ x\in\mathbf{R}.$$

Marcel Chiriță, profesor, București

21222. Să se demonstreze că $(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$ există $a,\ b,\ c\in\mathbf{R}$, nu toate nule, astfel încît să fie verificată relația:

$$(a+b+c)\cdot A^2+(ab+ac+bc)\cdot A+abc\cdot I_2=O_2,$$

unde I_2 și O_2 reprezintă matricea unitate, respectiv nulă, de ordinul 2, iar $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & \alpha \end{pmatrix}$.

Paul Vladu, inginer, Rm. Vîlcea

21223. Fie $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un șir de numere reale al cărui termen general este dat de formula $u_n=\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)$, unde $x_k(k=\overline{1,n})$ sînt rădăcinile reale ale polinomului cu coeficienți reali $P(X)=X^n+nX^{n-1}+a_{n-2}X^{n-2}+\ldots+a_0$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}u_n$.

Laurențiu Rusu, elev, București

21224*. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin relația de recurență $x_n=a\sin x_{n-1}+b\cos x_{n-1}$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$, unde $a,\ b\in\mathbf{R}$, $a^2+b^2<1$. Arătați că șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $y_n=x_1x_2\ldots x_n$, este convergent și calculați $\lim_{n\to\infty}y_n$.

Călin Burduşel, profesor, Tîrgoviște

21225. Se dă șirul $(a_n)_{n\geq 1}$: 3, 7, 13, ...

1. Să se afle termenul general $a_n=f(n)$, știind că $f(n)$ este un polinom în n de gradul doi cu coeficienți întregi;
2. Să se găsească o relație omogenă între termenii șirului;
3. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n$.

Aurel Doboşan, profesor, Lugoj

Clasa a XII-a

21226*. Fie $(G,\ \cdot)$ un grup cu proprietatea că există $n\in\mathbf{Z}$ pentru care aplicațiile $x\to x^{n+1}$, $x\to x^{2n+1}$ și $x\to x^{4n-1}$ sînt endomorfisme ale lui G. Să se demonstreze că G este abelian.

Titu Andreescu, profesor, Timișoara

21227. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție continuă și de n ori derivabilă. Dacă $\lim_{n\to\infty}f(n)=a\in\mathbf{R}$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(n-1).$$

Alexandru Constantinescu, inginer, București

Scanned with OKEN Scanner

C : 725. Fie $a \in I$, I interval și $f : I \to \mathbf{R}$ de $n+1$ ori derivabilă pe I. și $f^{(n+2)}(a) \neq 0$. Conform teoremei lui *Taylor* avem că $(\forall) x \in I$, $(\exists) c_x$ între a și x astfel încît

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x), \ (*).$$

Dacă pentru orice $x \in I \setminus \{c\}$ fixăm un $c_x \neq a$ pentru care are loc (*). atunci $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{c_x - a}{x-a} = \dfrac{1}{n+2}$.

Sebastian Anița, student, Iași

C : 726. Fie p un număr prim și $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbf{Z}[X]$.

a) Să se demonstreze că dacă polinomul f are o rădăcină întreagă. atunci polinomul $\bar{f} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 X + \ldots + \bar{a}_n X^n \in \mathbf{Z}_p[X]$ are o rădăcină în corpul $\mathbf{Z}_p (\bar{\alpha} \in \mathbf{Z}_p$ este clasa mod p a elementului $\alpha \in \mathbf{Z})$;

b) Dacă polinomul $\bar{f} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 X + \ldots + \bar{a}_n X^n$ are o rădăcină în corpul $\mathbf{Z}_p$, există $b_0 \in \mathbf{Z}$, $b_0 \equiv a_0 \pmod p$ astfel încît polinomul $g = b_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ are o rădăcină întreagă.

Valerică Rașcu, profesor, Rm. Vîlcea și
Radu Constantinescu, student, București

C : 727. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. Să se calculeze

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right), \text{ unde } \alpha > 0.$$

Liviu Pîrșan

C : 728. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu $0 \neq 1$. Arătați că dacă orice funcție $f : A \to A$ este polinomială, atunci $(A, +, \cdot)$ este corp.

Ion Savu, București

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

ADJUD (VRANCEA) S.g. 3 cl. IV Buțan Mariana (50); **ALEXANDRIA** (TELEORMAN) S.g. cl. V Căldăraru Luigi (65); **ARAD** (ARAD) Lic. „I. Slavici" cl. VI Verzea Onarina (38), cl. VIII Verzea Valentin (30); **AZUGA** (PRAHOVA) S.g. cl. VII Spiridon Marian (77);

BACĂU (BACĂU) S.g. 15 cl. V Asaftei Laura (97), Năstase Daniel (40), Năstase Noemi (70); S.g. 18 cl. VI Aromă Cedrin Alexandru (102), Ciceu Cornelia (145), Dăniciuc Laura (123), Ivan Melania (167), Spătaru Iulian (145), cl. VII Rusu Cristina (210), cl. VIII Andrei Mădălina (122), Barbu Hortensia (116), Cozma Ingrid (133); S.g. 19 cl. VI Godeanu Veronica (130), cl. VII Cheptănaru Laura (90); Lic. ped. cl. VIII Toma Romana (96); Lic. „G. Bacovia" cl. IX Răchieru Mihaela (92); **BAND** (MUREȘ) S.g. cl. V Porav Andreea (92); **BĂLAN** (HARGHITA) S.g. 1 cl. VII Vaida Claudia (130); **BEIUȘ** (BIHOR) S.g. cl. V Circap Darian (130), Euciu Lorela (49), Goina Florina (50); Lic. „S. Vulcan" cl. VI Fășie Rodica (90), Mihale Ioana (68), cl. VII Mazilescu Daniela (143), Nistor Alina (197), cl. VIII Budea Rodica (74), Jurca Violeta (83), Lucan Marius (86), Magda Dorina (99), Marian Ioan (85), Marcaș Angela (125), Sorea Doi-

Scanned with OKEN Scanner

na (97), Sava Ioan (72); **BOTOȘANI (BOTOȘANI)** S.g. 7 cl. V Vitalariu Dumitru (14), cl. VI Atudosie Cristina (122), Gojocaru Stela (49), Gheorghiașa Mihaela (130), Huțu Mihaela (95), Lăcătușu Oana (62), Mălăeru Beatris (100), Mustață Magdalena (117), Ochișor Anca (137), cl. VIII Mustață Elena (89), Pîrlog Mihaela (105); S.g. 12 cl. VI Bănțu Nicoleta (90), Chiriac Daniel (100), Creangă Otilia (75), Damian Dan (60), Moga Manuela (140), Onofrei Camelia (95); S.g. 13 cl. VI Atodiresei Vasile (63), Ayasilică Lăcrămioara (100), Buliga Loredana (105), Eno Cristian (180), Grigoruță Sorin (100), Gulea Ioan (210), Lăzurcă Vasilică (65), Samson Ionela (45), Șteclș Florian (150); Lic. „A. T. Laurian" cl. X Mihalache Radu (144); **BRAȘOV (BRAȘOV)** S.g. 5 cl. V Gherman Nicolae (60), Papuc Radu (90), Popescu Tiberiu (65); S.g. 7 cl. V Botescu Cătălin (90), Marin Irina (100), Mănzariu Olivia (90), Păvălucă Monica (82), Tomas Lucian (90), cl. VI Chișu Corina (49), Ștefănescu Goangă Ilinca (165), Tira Adrian (130); S.g. 13 cl. VI Ghelase Liliana (68); S.g. 27 cl. VI Minu Maria (27), cl. VIII Lăcrănjan Mircea (96); **BRĂILA (BRĂILA)** S.g. 18 cl. V Canteș Cătălin (149); S.g. 22 Chirpac Florentina (190); S.g. 23 cl. V Bălănică Roxana (87), Brăilescu Alina (117), Calotă Costin (118), Costea Mihaela (202), Dovleții Emanuela (140), Lăzărescu Adriana (91), Munteanu Anca (100), Popescu Magdalena (102), cl. VI Dima Bogdan (210), Goga Camelia (105), Matei Teodora (72), Mihai Daniela (102), Oprea Luminița (34), Toma Bogdan (105); S.g. 29 cl. V Ciorică Ana Maria (51), Doroftei Dragoș (149), Ionașcu Cornel (63), Noșca Claudia (97); Lic. ind. „Progresul" cl. XII Neică Manuela (84); **BUCECEA (BOTOȘANI)** cl. VII Chiș Mihai (93), Zelenschi Maria (104);

BUCUREȘTI S.g. 5 cl. VII Grama Daniel Matei (120), Stoica Sergiu (57); S.g. 11, cl. II Albu Andrei (100); S.g. 15 cl. VIII Popescu Ioana (200); S.g. 30 cl. VI Alexandru Mihaela (128); S.g. 49 cl. I Calude Andreea (60); S.g. 75 cl. VI Litinski Mihai (53); S.g. 93 cl. VI Alcea Sarina (48), Dumă Radu (179), Ploeșteanu Anca (53); S.g. 156 cl. V Benko Agnes (90); S.g. 157 cl. V Isub Lisa (140); S.g. 169 cl. VI Dăncilă Eduard (600); S.g. 198 cl. V Apostolina Șerban (99), Marian Mihaela (51), Marinescu Adrian (66), Nițu Adrian (54), cl. VI Moraru Dan (208); S.g. 198 cl. VI Vechler Edoard (93); S.g. 21 cl. VII Dumitrescu Sorin (117); Lic. „I. L. Caragiale" cl. IX Bătrîna Nicolae (78), Diaconu Elisabeta (100), Filip Raluca (84), Mărculescu Cristina (101), Sîrbu Cristina (79), Ștefănescu Gabriela (93); Lic. „M. Viteazu" cl. X Turi Tiberiu (90);

CARANSEBEȘ (CARAȘ-SEVERIN) S.g. 8 cl. V Simulescu Florin (60), Serengău Gherti (78), Toma Sorin (33); **CĂLĂRAȘI (CĂLĂRAȘI)** S.g. 4 cl. VI Mîțu Claudia (165); **CÎMPINA (PRAHOVA)** S.g. 2 cl. VI Stoian Dan (50); **CÎMPULUNG (ARGEȘ)** S.g. 5 cl. II Nițescu Doru (80), Nițescu Liviu (53); **CLUJ-NAPOCA (CLUJ)** S.g. 15 Banu Ruxandra (90), Vințeleriu Mariana (90), cl. III Uțiu Monica (90), Bogățean Mugur (120), cl. IV Moroșanu Carla (120); Lic. mat. fiz. 2, cl. X Iurian Marius (130); **CONSTANȚA (CONSTANȚA)** S.g. 35 cl. III Lambă Cristina (50); **CRAIOVA (DOLJ)** Lic. „Fr. Buzești" Dumitrana Irina (80), cl. V Mihalcea Alina (90), cl. X Stroescu Claudiu (200); S.g. 30 cl. VII Cruceru Aurelian (49); S.g. 31 cl. V Fărcășanu Irina (140), Niță Elisabeta (120); S.g. 32 cl. V Băbălău Iulian (89), Morărașu Mihaela (110), cl. VI Cocheci Titela (81), Ionescu Mihaela (80), Mihai Florina (72); S.g. 35 cl. VII Stamatoiu Damian (110); **CURTEA DE ARGEȘ (ARGEȘ)** S.g. 1 cl. V Cătălin Ionel (128);

DARABANI (BOTOȘANI) S.g. 1 cl. VI Anicăitoaie Amalia (55), Iftineaei Melania (48), Mihai Carmen (60); **DEJ (CLUJ)** S.g. 3 cl. V Pintea Mihaela (70), Sandru Lavinia (70), cl. VI Colțș Adriana (75), Ilieș Nicoleta (80), cl. VIII Moldovăn Ioana (116), Negreanu Lucia (105), Pop Claudia (102), Spermezan Corina (92); **DROBETA-TR. SEVERIN (MEHEDINȚI)** S.g. 3 cl. VI Neagoe Romana (100), cl. VII Mărmăneanu Adriana (98); **DRĂGĂNEȘTI (OLT)** S.g. 1 cl. IV Baltă Raisa (230); **FOCȘANI (VRANCEA)** S.g. 8 cl. III Eșanu Cristinel (135), Iosif Ionuț (100) S.g. 9 cl. IV Dodu Bogdan (110), Hofman Mihaela (80); Lic. „Al. I. Cuza" cl. IX Pandelaș George (80); **GALAȚI (GALAȚI)** S.g. 6 cl. V Angheluță Roxana (96), Doltu Alina (80) S.g. 25 cl. V Ilie Monica (97), cl. VI Împăratu Elena (130), Banu Octavian (78), Bogoi Maria (85); S.g. 28 cl. IV Popovici Tiberiu (160), cl. VI Bălan Alina (57), cl. VII Miron Vlad (70), Pojoga Roxana (130), cl. VIII Pădure George (81); S.g. 40 cl. VI Mistreanu Ana (130); S.g. 42 cl. V Botez Sebastian (90), cl. VI Mihalache Dana (84), Nițu Mariana (100), cl. VII Bîrlădeanu Marlena (120), Diaconescu Camelia (89), Zamfir Romelia (110); S.g. 10 cl. VI Stanciu Simona (110); S.g. 25 cl. IV Tașcă Iulia (70), cl. V Bogoi Maria (85); S.g. 42 cl. V Boldea Valentin (98); **GĂEȘTI (DÎMBOVIȚA)** Lic. ind. mat. fiz. cl. X Albu Felix (100); **GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ (DEJ)** S.g. cl. IV Stoica Ciprian (80); **GHERLA (CLUJ)** Costea Răzvan (120); S.g. cl. III Tarta Georgian (60); **GIURGIU (GIURGIU)** S.g. 7 cl. II Toma Sorina (100);

HANEȘTI (BOTOȘANI) S.g. cl. V Tilică Mihaela (30); **HUȘI (VASLUI)** S.g. 2 cl. VII Enache Manuela (119), Lazăr Alina (96), Mihu Daniela (105), Mihu Veronica (119), Plugaru Mariana (106), Scurtu Mihaela (120), Sfetcu Ghena (115); **HUNEDOARA** S.g. 1 cl. V Budai Claudia (100); **IAȘI (IAȘI)** S.g. 13 cl. V Mîțescu Dan (50); S.g. 31 cl. IV Popa Bogdan (50); Lic. Național cl. VII Popa Adriana (49); Lic. „G. Ibrăileanu" cl. V Bârșan Constantin (90), cl. VI Vidrașcu Cristian (100); Lic. „C. Negruzzi" cl. IX Apreutesei Gabriela (92), Toca Mirela (125); Lic. „O. Băncilă" cl. III Popa Iulia (160); **LUNCA (BOTOȘANI)** S.g. cl. VII Boicu Mi-

Scanned with OKEN Scanner

haela (40); **LUPENI** (HUNEDOARA) S.g. 2 cl. V Drăghici Daniela (60); **MĂGURA ILVEI** (BISTRIȚA NĂSĂUD) S.g. 1 cl. III Bindiu Gisella (170); **MOTRU** (GORJ) S.g. 1 cl. V Năsrăudă Carmen (60), cl. VI Paralescu Justin (156); **MORENI** (DÎMBOVIȚA) S.g. 4 cl. V Dinică Elena (55); **NICULIȚEL** (TULCEA) S.g. cl. VI Miron Anca (65); **ORADEA** (BIHOR) S.g. 6 cl. V Gavriș Mihaela (90), cl. VI Balazshagi Romana (90);

PIATRA NEAMȚ (NEAMȚ) S.g. 2 cl. VII Aron Mihai (99); **PITEȘTI** (ARGEȘ) S.g. 1 cl. III Braniște Mihail (160); S.g. 11 cl. V Șerban Viorel (218); S.g. 13 cl. V Gheorghiu Adrian (70); S.g. 14 cl. IV Radu Elena (50), Stoicescu Cristina (40); S.g. 15 cl. VI Stoica Corina (95); **PLOIEȘTI** (PRAHOVA) S.g. 3 cl. V Roman Irina (48), cl. VI Cocîrlea Costin (42), Munteanu Aurora (25), cl. VII Lăcătușu Daniela (72); S.g. 5 cl. V Zgâia Dana (80); S.g. 6 cl. III Cazachevici Mihai (60); **RĂDĂUȚI** (SUCEAVA) S.g. 5 cl. V Banmătă Olivian (69); **RIȘNOV** (BRAȘOV) S.g. 2 cl. VII Navloru Gabriel (67); **RÎMNICU SĂRAT** (BUZĂU) S.g. 4 cl. VI Mihăilescu Luminița (53); **RÎMNICU VÎLCEA** (VÎLCEA) S.g. 1 cl. II Constantinescu Dumitru (40), cl. V Scortar Monica (72), cl. VI Ceaușu Iulia (59), Popescu-Sorin (40); Lic. ind. 7 cl. V Gogeoman Oana (90); Lic. mat. fiz. cl. VII Herzal Cristina (85); **ROMAN** (NEAMȚ) S.g. 7 cl. IV Smit Mădălina (122); S.g. 11 cl. VI Anton Camelia (130), cl. VII Staleriu Iulian (99); **RUGINEȘTI** (VRANCEA) S.g. cl. V Dumitrache Răzvan (60); **SĂLĂTRUC** (ARGEȘ) S.g. 1 cl. III Matei Tatiana (50); **SLATINA** (OLT) S.g. 5 cl. III Voiculescu Cristian (110), cl. VI Grigore Elena (99); S.g. 7 cl. V Lacraru George (80); **SUCEAVA** (SUCEAVA) S.g. 3 cl. VI Ciocan Cosmina (85), Oprea Alexandru (69); S.g. 8 cl. III Crășmaru Marilena (160); **ȘTEFAN CEL MARE** (CĂLĂRAȘI) S.g. cl. VII Dolimoț Dănuț (70);

TĂMȘAD (SATU MARE) S.g. cl. II Netea Elena (110); **TECUCI** (GALAȚI) S.g. 2 cl. III Irimi Simona (120), cl. IV Ciuciu Florin (70); S.g. 5 cl. V Florea Tudor (45), cl. VI Chivu Iulian (49); S.g. 8 cl. III Ichim Lucian (70), cl. IV Borș Cristinel (100), Marin Dona (100), Savin Cristina (70), Tomiță Iuliana (80), Spaimă Costel (70); S.g. 10 Apetrei Laurian (68); **TÎRGOVIȘTE** (DÎMBOVIȚA) S.g. 5 cl. V Ștefan Cătălina (88); S.g. 6 cl. V Blidărescu Roxana (78); **TÎRGU JIU** (GORJ) S.g. 12 cl. V Cambrea Mihaela (58), Ninu Elena (75), Petrișor Mihaela (86); **TÎRGU NEAMȚ** (NEAMȚ) S.g. 5 cl. III Dănilă Dan (78); **TULCEA** (TULCEA) S.g. 4 cl. IV Dorache Adrian (54); **URZICENI** (IALOMIȚA) S.g. 2 cl. III Mazilu Camelia (130); **VĂLENII DE MUNTE** (PRAHOVA) S.g. 3 cl. IV Florescu Răzvan (100); **VLĂHIȚA** (HARGHITA) S.g. 2 cl. VII Kovacs Zoltan (60); **ZĂGAR** (MUREȘ) S.g. cl. VII Ignat Cosmin (66); **ZALĂU** (SĂLAJ) Lic. mat. fiz. cl. IX Erdei Marta (52), Stamen Monica (38), cl. X Borzan Liliana (56).

I. P. Informația c. 1440

Index 41 601.

Lei 3,50

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XCII nr. 2 — Februarie 1987

PROFESORUL GHEORGHE D. SIMIONESCU

La 22 octombrie 1986 s-a stins din viață profesorul Gheorghe D. Simionescu, colaborator notoriu al Gazetei Matematice și unul dintre cei mai de seamă pedagogi ai școlii românești.

Gheorghe D. Simionescu s-a născut la 25 mai 1907 în comuna Filești, lîngă Galați, ca fiu de ofițer. A absolvit liceul militar de la Mînăstirea Dealu, ca șef de promoție, în 1925. A fost elevul profesorilor eminenți *Octav Onicescu*, *Grigore* și *Gheorghe Zapan*, *Gheorghe T. Dumitrescu*, *Alexandru Andronic*. Ca elev de liceu, a fost corespondent activ la Gazeta Matematică și la Revista Matematică din Timișoara, în rînd cu *Emil Ștefănescu*, *Ion Barbăt'at*, *Mircea Adam*, *Nicolae Botea*, *Tiberiu Popoviciu*, *Mihail Focșeneanu*, *Paul Ionescu*, *Constantin Ionescu-Bujor* și alții.

În 1928 a absolvit Facultatea de matematică din București, unde i-a avut ca profesori pe *David Emanuel*, *Ermil Pangrati*, *Nicolae Coculescu*, *Gheorghe Țițeica*, *Dimitrie Pompeiu*, *Anton Davidoglu*, *Traian Lalescu*. În același an au absolvit facultatea și *Traian Lalescu*, *Ioana Gîței*, *Tiberiu Ionescu* și alții. În paralel, *Gheorghe Simionescu* a urmat și cursurile școlii politehnice.

A susținut examenul de capacitate în anul 1931, dată de la care a intrat în învățămîntul secundar, inițial ca profesor la liceul militar Îndrăgit de la Mînăstirea Dealu (1931–1936). În cei cinci ani de funcționare acolo, tînărul și entuziastul profesor *Simionescu* a depus o activitate impresionantă. Nu se limita să fie pedagog desăvîrșit în clasă, dar îi urmărea îndeaproape pe elevii mai înzestrați, pe care îi antrena în ore suplimentare insuflîndu-le satisfacția înțelegerii noțiunilor mai delicate și bucuria rezolvării problemelor mai dificile. Datorită acestei îndrumări pricepute și tenace, concordată apoi cu a profesorului de asemenea eminent, *Cezar Coșniță*, elevii de la liceul menționat cucereau an de an, aproape toate premiile la concursurile anuale ale Gazetei Matematice. De menționat că dintre elevii lui de atunci, *Ion Șabac* și *Ion Elianu*, au devenit doctori în matematici și profesori universitari. Din 1936 profesorul *Simionescu* s-a transferat în București activînd cu aceeași dăruire la liceele *Gheorghe Lazăr* (1936–37), *Spiru Haret* (1937–39), seminarul pedagogic universitar (1939–41), gimnaziul muzical (1940–41), *Mihai Viteazu* (1944–48). Între 1941–47 a fost inspector școlar iar între 1937–39 a activat și la școlile superioare de ofițeri, de toate armele, predînd cursuri universitare de matematici.

În anul 1948, cînd, prin reforma învățămîntului, au fost create numeroase institute tehnice superioare iar numărul de doctori în matematici era insuficient, ministerul a apelat la cîțiva din profesorii destoinici de învățămînt mediu; ei s-au dovedit pedagogi excelenți și în noul post, confirmînd încrederea conducerii. Printre ei, profesorul *Simionescu*, care se impunea printre primii, a fost chemat să predea pentru studenții facultăților de mecanică din cadrul Institutului politehnic din București. Acolo, conferențiarul *Gheorghe Simionescu* a fost un cadru didactic de prestigiu, funcționînd pînă la pensionare, în anul 1972, asigurînd o bună pregătire teoretică studenților săi, care au devenit, în bună parte, ingineri de valoare.

La Gazeta Matematică, *Gheorghe Simionescu* a devenit membru din 1934, luînd parte de la început, cu devotament constant, la toată munca redacțională, alături de *Ion Ionescu*, *Gheorghe Buicliu*, *Ovidiu Țino*, *Constantin Ionescu-Bujor*, *Alexandru Sloenescu*, *Constantin Ionescu-Țiu*, *Nicolae Mihăileanu* — citînd numai echipa care permanent, în afara publicării notelor proprii și a problemelor propuse, au dus toată munca de corectare a soluțiilor corespondenților, de controlul materialului trimis spre publicare, au redactat soluțiile problemelor elevilor și ale colaboratorilor externi, au activat în toate concursurile anuale și în general, au contribuit material și prin prezență constantă, la toată activitatea Societății. Îndeosebi, *Gheorghe Simionescu* a fost unul dintre redactorii cei mai devotați ai Suplimentului cu Exerciții al Gazetei Matematice, de la înființarea revistei, din 1934. După 1948, profesorul *Simionescu* a activat sporadic, dar pînă în ultimii ani, la noua Gazetă Matematică, pentru profesori și pentru elevi.

Scanned with OKEN Scanner

Ca activitate publicistică, *Gheorghe Simionescu* este autorul a numeroase note și probleme, cu predilecție de geometrie sintetică, analitică și proiectivă, unele foarte specializate. Îndeosebi sînt remarcabile cercetările sale, întreprinse din 1934, relativ la triunghiurile triomologice și triortologice. Parte dintre problemele interesante ale profesorului *Simionescu* au intrat în multe culegeri antologice de probleme.

Pentru studenții săi, profesorul *Simionescu* a litografiat unele cursuri, începînd din 1950. Pentru un public studios mai larg, a tipărit în co aborare, o apreciată culegere de probleme de algebră și analiză. Iar în primul rînd, el s-a devotat elevilor și profesorilor de școli medii. Pentru ei a scris numeroase cărți didactice. Citățm o trigonometrie sferică din 1965 ; o culegere de probleme date la concursuri, în colaborare, din 1970 ; un îndrumar cu probleme de geometrie, din 1978 ; o carte de aplicarea calculului vectorial în geometrie, din 1982.

De numele profesorului *Simionescu* este legată, cu deosebită cinstire, opera de revizuire, de completare și de detaliere a rezolvărilor problemelor din celebra culegere de probleme de geometrie, alcătuită inițial de *Gheorghe Țițeica*, dar cu fiecare nouă ediție, colaboratorul devenind în fond, principalul coautor. Cu dragoste și migală, profesorul *Simionescu* a transformat o carte greu de citit de către începători, într-o anexă accesibilă a învățămîntului, care a vrăjit atîtea generații de elevi.

Dar mai ales profesorul *Simionescu* este cunoscut de publicul larg prin excelentele sale manuale școlare, începînd cu cărțile în colaborare, pentru gimnaziu, din 1947. Trecînd peste perioada de traduceri a manualelor școlare, atunci cînd s-a revenit la experiența autorilor români, marilor pedagogi *Cezar Coșniță* și *Gheorghe Simionescu* li s-a încredințat, în 1956, alcătuirea manualelor de geometrie plană și în spațiu pentru licee. Îndeosebi manualul de geometrie analitică al profesorului *Simionescu*, unul dintre manualele de cea mai lungă durată în învățămîntul nostru (1958—1980), este un model de carte pedagogică. Chiar dacă am considera numai rolul jucat prin manualele sale, profesorul *Simionescu* a fost prezență permanentă, luminoasă, în învățămîntul mediu, aproape 30 de ani. El se înscrie astfel în galeria marilor pedagogi ai școlii românești : *Gheorghe Asachi, Constantin Climescu, Spiru Haret, Ion Tutuc, Gheorghe Țițeica, Nicolae Abramescu, Grigore Orășanu, Gheorghe Dumitrescu, Abraham Hollinger, Eugen Rusu, Cezar Coșniță* și alții.

Menționăm și faptul că prin competența și judicioasa sa apreciere, unanim recunoscută, profesorul *Simionescu* a fost solicitat de editura Didactică și de editura Tehnică, în calitate de referent la numeroase cărți didactice publicate, dînd îndrumări substanțiale autorilor, prin îmbunătățirea lucrărilor lor.

Profesorul *Gheorghe Simionescu* rămîne în inima elevilor direcți, apoi ai studenților lui, prin amintirea unor lecții atrăgătoare și accesibile ; în fața unui cerc mai larg, prin numeroasele sale cărți pedagogice, note și probleme de valoare ; iar pentru aceia care au avut relații directe cu el, în diferite împrejurări ale vieții, și ca un om de înaltă ținută morală și de desăvîrșit echilibru. A fost unul din piloniii de bază ai învățămîntului, ai Gazetei Matematice și a colectivului social.

Redacția Gazetei Matematice

ASUPRA UNEI FORMULE A LUI LAGRANGE ȘI EXTINDEREA EI

de Acad. Caius Iacob

1. Teorema lui Leibniz.

Să considerăm în spațiul euclidian tridimensional un sistem (S) de puncte materiale A_i, de mase $m_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, $(m_i > 0)$. Se știe că centrul de inerție G (centrul maselor sistemului) este definit prin condiția

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i} = 0, \tag{1}$$

care-l determină în mod unic ([1], [2]).

Fie O un punct oarecare al spațiului. Dacă se consideră vectorii de poziție $\overrightarrow{OA_i}$ și $\overrightarrow{OG}$, observînd că $\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG}$, din (1) rezultă relația clasică ([1], [2]),

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se numește *moment de inerție* al sistemului (S) față de un punct oarecare P expresia

$$I_P(S) = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{PA_i}^2. \tag{3}$$

Fie

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{4}$$

masa totală a sistemului (S). Se datorește lui *Leibniz* o formulă importantă care exprimă pe $I_P(S)$ cu ajutorul momentului de inerție $I_G(S)$ al sistemului față de centrul maselor G. Formula lui *Leibniz* este

$$I_P(S) = I_G(S) + \mathcal{M}\overline{PG}^2 \tag{5}$$

unde

$$I_G(S) = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{GA_i}^2 \tag{6}$$

Avem deci enunțul următor care constituie

Teorema lui Leibniz: *Momentul de inerție al unui sistem material (S) față de polul P este egal cu momentul său de inerție față de polul G plus momentul de inerție față de polul P al punctului material G, dotat cu masa totală $\mathcal{M}$ a sistemului (S).*

Demonstrația este imediată. Avem $\overline{PA_i} = \overline{PG} + \overline{GA_i}$ și deci

$$I_P(S) = \sum_{i=1}^{n} m_i (\overline{PG}^2 + 2\overline{PG} \cdot \overline{GA_i} + \overline{GA_i}^2).$$

Astfel, în virtutea lui (1), (4) și (6), rezultă relația (5).

2. Formula lui Lagrange.

Să notăm prin (S_G) sistemul material format numai din punctul G, dotat cu masa $\mathcal{M}$. Momentul de inerție al lui (S_G) față de P este

$$I_P(S_G) = \mathcal{M} \cdot \overline{PG}^2, \tag{7}$$

astfel că (5) se mai scrie

$$I_P(S) = I_G(S) + I_P(S_G), \tag{8}$$

unde termenul $I_G(S)$ nu depinde de P ci numai de sistemul (S), deoarece G, el însuși, depinde numai de (S).

Lagrange a dat o altă expresie remarcabilă pentru $I_G(S)$ cu scopul de a pune mai bine în evidență acest fapt. Pentru a obține formula lui *Lagrange*, să alegem polul P în punctul A_j. Din (8) rezultă atunci

$$I_{A_j}(S) = I_{A_j}(S_G) + I_G(S). \tag{9}$$

Să înmulțim în (9) cu m_j și să adunăm membru cu membru toate relațiile obținute pentru $j = 1, 2, \ldots, n$. Se obține

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{A_jA_i}^2 = \sum_{j=1}^{n} m_j I_G(S) + \sum_{j=1}^{n} m_j (\mathcal{M}\overline{A_jG}^2) = 2\mathcal{M} I_G(S),$$

astfel încît

$$I_G(S) = \frac{1}{2\mathcal{M}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_i m_j \overline{A_iA_j}^2. \tag{10}$$

Înlocuind în (5) rezultă astfel formula lui Lagrange

$$I_P(S) = \mathcal{M}\overline{PG}^2 + \frac{1}{2\mathcal{M}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_i m_j \overline{A_iA_j}^2. \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această formulă se mai poate scrie și sub forma mai explicită

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{PA_i}^2 = \mathcal{M} \cdot \overrightarrow{PG}^2 + \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{(i,j)}^{n} m_i m_j \overrightarrow{A_iA_j}^2 \tag{12}$$

unde $\sum_{(i,j)}^{n}$ reprezintă însumarea termenilor corespunzînd tuturor combinărilor (i, j) formate cu cele n elemente $(1, 2, \ldots, n)$ luate cîte două. Avem deci C_n^2 termeni de însumat. A se vedea în legătură cu formula (11) și lucrarea [3].

3. Exemple și aplicații

1) Să considerăm triunghiul ABC și să dotăm vîrfurile A, B, C respectiv cu masele m_1, m_2, m_3. Formula lui *Lagrange* (12) devine acum

$$m_1 \overrightarrow{PA}^2 + m_2 \overrightarrow{PB}^2 + m_3 \overrightarrow{PC}^2 = \mathcal{M} \cdot \overrightarrow{PG}^2 + \frac{1}{\mathcal{M}} (m_1 m_2 \overrightarrow{AB}^2 + m_2 m_3 \overrightarrow{BC}^2 + m_3 m_1 \overrightarrow{CA}^2) \tag{13}$$

unde $\mathcal{M} = m_1 + m_2 + m_3$. Sub această formă, dar cu o altă terminologie (P fiind considerat ca o intersecție de ceviene în triunghi), ea a fost regăsită recent de *V. Bândilă* [4], utilizînd însă pentru aceasta relațiile lui *Van Aubel* și teorema lui *Stewart* în triunghi. Dacă $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, ea este semnalată și în [5], p. 54, sub denumirea de *„teorema lui Leibniz"*. În acest caz particular însă G este punctul de intersecție al medianelor. Tot în [5], se indică o relație în triunghiul ABC, care este echivalentă cu formula (13) și ea este prezentată ca o generalizare a formulei lui *Leibniz* dată anterior.

2) Să considerăm tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ și să dotăm punctele A_i cu masele m_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Dacă toate aceste mase sînt egale între ele, atunci G este intersecția dreptelor care pleacă din vîrfuri și pe care le unesc respectiv cu punctele de intersecție ale medianelor fețelor opuse. A se vedea de exemplu [6]. Vom avea deci relația

$$\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{PA_i}^2 = 4\overrightarrow{PG}^2 + \frac{1}{4} \sum_{(i,j)}^{4} \overrightarrow{A_iA_j}^2 \tag{14}$$

pentru orice punct P din spațiu. În particular, dacă P coincide cu G, avem

$$\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{GA_i}^2 = \frac{1}{4} \sum_{(i,j)}^{4} \overrightarrow{A_iA_j}^2 \tag{15}$$

ceea ce reprezintă o proprietate importantă a tetraedrului.

3) Dacă punctele A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se găsesc pe o sferă de centru O și de rază R, atunci pentru $P = O$, avem $I_P(S) = \mathcal{M}R^2$, $\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{OG}$ și formula (5) conduce la relația

$$\overrightarrow{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{\mathcal{M}} I_G(S), \tag{16}$$

ceea ce în virtutea lui (10) se mai scrie

$$\overrightarrow{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{\mathcal{M}^2} \sum_{(i,j)}^{n} m_i m_j \overrightarrow{A_iA_j}^2. \tag{17}$$

Această formulă generalizează de asemenea pe aceea considerată în [4], p. 37 și ea poate să conducă la numeroase proprietăți geometrice interesante, în special în cazul triunghiului sau tetraedrului.

Pentru ilustrare, vom da o demonstrație simplă a unei teoreme a lui *Euler*, utilizînd limbajul geometriei maselor.

Fie triunghiul ABC și O centrul cercului circumscris triunghiului. Să plasăm în vîrfurile triunghiului A, B, C masele ka, kb, kc, $(k \neq 0)$, proporționale cu lungimile laturilor opuse. Se știe (a se vedea de exemplu [6]) că în acest caz centrul G al maselor acestui sistem (S) este centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC, deoarece el este chiar intersecția bisectoarelor. Prin urmare, formula (17) conduce la

$$\overrightarrow{OI}^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}. \tag{18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar, dacă $\sigma[ABC]$ este aria triunghiului ABC, se știe că

$$R = \frac{abc}{4\sigma[ABC]}, \quad r = \frac{2\sigma[ABC]}{a+b+c}. \tag{19}$$

Deci (18) se mai scrie sub forma

$$\overline{OI}^2 = R(R-2r). \tag{20}$$

Se regăsește astfel *teorema lui Euler*.

4) În articolul menționat [4], p. 36, se dă și o formulă privind distanța dintre punctele de intersecție a două triplete de ceviene. Această relație însă poate fi de asemenea generalizată la un sistem format din n puncte materiale, dacă ne plasăm în cadrul natural al geometriei maselor, care este cel mai potrivit pentru acest gen de probleme.

Să considerăm alături de sistemul material (S) și sistemul material (S') format din *aceleași puncte* A_i, dotate însă cu masele m_i', $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Să notăm prin

$$\mathcal{M}' = \sum_{i=1}^{n} m_i' \tag{21}$$

masa totală a lui (S') și fie G' centrul de inerție corespunzător. Avem în mod analog

$$I_P(S') = \mathcal{M}' \cdot \overline{PG'}^2 + \frac{1}{\mathcal{M}'} \sum_{(i,j)} m_i' m_j' \cdot \overline{A_iA_j}^2. \tag{22}$$

În particular, dacă se ia în (11) $P = G'$ avem

$$I_{G'}(S) = \mathcal{M}\overline{GG'}^2 + I_G(S). \tag{23}$$

La fel, dacă în (22) se ia $P = G$ se obține

$$I_G(S') = \mathcal{M}'\overline{GG'}^2 + I_{G'}(S'). \tag{24}$$

Dar

$$I_{G'}(S) = \sum_{j=1}^{n} m_j \overline{G'A_j}^2 \tag{25}$$

și dacă ținem seamă de formula (9), scrisă pentru sistemul (S') și explicitată sub forma

$$\sum_{i=1}^{n} m_i' \overline{A_jA_i}^2 = \mathcal{M}'\overline{A_jG'}^2 + I_{G'}(S'), \tag{9'}$$

avem din (23), (25) și (9')

$$\mathcal{M}\overline{GG'}^2 + I_G(S) = \sum_{j=1}^{n} m_j \left[\frac{1}{\mathcal{M}'} \sum_{i=1}^{n} m_i' \overline{A_jA_i}^2 - \frac{1}{\mathcal{M}'} I_{G'}(S') \right].$$

Prin urmare

$$\overline{GG'}^2 = \frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{M}'} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_i m_i' \overline{A_iA_j}^2 - \left[\frac{1}{\mathcal{M}} I_G(S) + \frac{1}{\mathcal{M}'} I_{G'}(S') \right] \tag{26}$$

unde $I_G(S)$ și $I_{G'}(S')$ se pot exprima cu ajutorul formulei lui *Lagrange* (10). Avem aici sub o formă mult mai generală relația semnalată de *V. Bândilă* [4], pentru cazul triunghiului ABC și din care el a obținut interesante aplicații geometrice.

Observație. Dacă punctele A_i se găsesc pe o sferă de centru O și de rază R și dacă masele distribuite m_i' sînt astfel că $G' = O$, avem

$$\sum_{i=1}^{n} m_i' \overline{OA_i} = 0. \tag{27}$$

Scanned with OKEN Scanner

în acest caz, ținînd seama și de (27),

$$I_G(S) = \mathcal{M}'R^2, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i m_j (\overrightarrow{OA_j} - \overrightarrow{OA_i})^2 = 2R^2\mathcal{M}\mathcal{M}'$$

astfel încît formula (26) se reduce la (17).

4. **Tensorul de inerție**

Să adoptăm un sistem de referință $Ox_1x_2x_3$, triortogonal și de sens direct. Să notăm prin $\overrightarrow{E}$ tensorul unitate al lui *Kronecker*, adică tensorul ale cărui componente sînt

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \neq j \\ 1 & \text{dacă } i = j, (i, j = 1, 2, 3). \end{cases} \tag{28}$$

Tensorul de inerție al sistemului (S) în punctul P este definit prin relația

$$\overrightarrow{I_P}(S) = \overrightarrow{E}\sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{PA_k} - \sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{PA_k} \otimes \overrightarrow{PA_k} \tag{29}$$

unde $\overrightarrow{PA_k} \otimes \overrightarrow{PA_k}$ este produsul tensorial al vectorului $\overrightarrow{PA_k}$ cu el însuși.

Dacă notăm prin $X_1^{(k)}$, $X_2^{(k)}$, $X_3^{(k)}$ componentele vectorului $\overrightarrow{PA_k}$ pe axele sistemului de referință, atunci componentele tensorului $\overrightarrow{AP_k} \otimes \overrightarrow{AP_k}$ sînt $X_i^{(k)}X_j^{(k)}$, cu $i, j = 1, 2, 3$ iar relația (27) ne conduce la componentele tensorului de inerție $\overrightarrow{I_P}(S)$ date de

$$I_{ij}^{(P)}(S) = \delta_{ij}\sum_{k=1}^{n} m_k(X_1^{(k)2} + X_2^{(k)2} + X_3^{(k)2}) - \sum_{k=1}^{n} m_k X_i^{(k)} X_j^{(k)}, \ (i=1, 2, 3; \ j=1, 2, 3). \tag{30}$$

Aceste componente formează o *„matrice de inerție"* în sistemul dat de referință, dar la schimbarea sistemului de referință matricea $I_{ij}^{(P)}(S)$ se va schimba în alta după o lege anumită [2] și aceasta dă caracter de tensor entității matematice pe care ea o definește și care are caracterul intrinsec, adică independent de sistemul de referință, vizibil pe formula (29).

Relația (29) definește tensorul de inerție ca un cîmp tensorial asociind deci fiecărui punct P al spațiului un tensor ce depinde de sistemul (S).

Legea de schimbare a acestui tensor de inerție la trecerea de la punctul P la punctul G (centrul de masă al sistemului S) este [7], p. 144,

$$\overrightarrow{I_P}(S) = \overrightarrow{I_G}(S) + \overrightarrow{I_P}(S_G) \tag{31}$$

unde

$$\overrightarrow{I_P}(S_G) = \overrightarrow{E}(\mathcal{M} \cdot \overrightarrow{PG}^2) - \mathcal{M}\overrightarrow{PG} \otimes \overrightarrow{PG} \tag{32}$$

este tensorul de inerție al sistemului material (S_G), redus la punctul G, dotat cu masa $\mathcal{M}$.

Demonstrația acestei relații se bazează pe egalitățile următoare:

$$\overrightarrow{PA_k}^2 = (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA_k})^2 = \overrightarrow{PG}^2 + \overrightarrow{GA_k}^2 + 2\overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{GA_k},$$

$$\overrightarrow{PA_k} \otimes \overrightarrow{PA_k} = (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA_k}) \otimes (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA_k}) = \overrightarrow{PG} \otimes \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA_k} \otimes \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PG} \otimes \overrightarrow{GA_k} + \overrightarrow{GA_k} \otimes \overrightarrow{GA_k},$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{GA_k} = 0.$$

Dacă în (30) se operează o „contracție", adică se egalează indicii i și j, și se sumează dînd lui i valorile 1, 2, 3, se obține

$$\sum_{i=1}^{3} I_{ii}^{(P)}(S) = 2I_P(S). \tag{33}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, dacă în relația (31) se efectuează o contracție regăsim teorema lui *Leibniz*, exprimată prin formula (5).

Formula lui *Lagrange* (11) se regăsește de asemenea ca un caz particular al unei formule mai generale.

Teoremă. *Tensorul de inerție al sistemului (S) față de centrul său de masă G este dat de*

$$\vec{\vec{I}}_G(S) = \frac{1}{2\mathcal{M}} \left\{ \vec{\vec{E}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_k m_l \overrightarrow{A_k A_l}^2 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_k m_l \overrightarrow{A_k A_l} \otimes \overrightarrow{A_k A_l} \right\} \cdot \cdot \qquad (34)$$

Demonstrație. Dacă în (31) se ia $P = A_k$ se obține

$$\vec{\vec{I}}_{A_k}(S) = \vec{\vec{I}}_G(S) + \vec{\vec{I}}_{A_k}(S_G) \qquad (35)$$

unde

$$\vec{\vec{I}}_{A_k}(S) = \vec{\vec{E}}(\mathcal{M}\overrightarrow{A_k G})^2 - \mathcal{M}\overrightarrow{A_k G} \otimes \overrightarrow{A_k G}. \qquad (36)$$

Să înmulțim în (35) cu m_k și să sumăm egalitățile obținute dînd lui k valorile 1, 2, ..., n. Se găsește

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{\vec{I}}_{A_k}(S_G) = \mathcal{M}\vec{\vec{I}}_G(S) + \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{\vec{I}}_{A_k}(S_G)$$

unde urmează a se ține seamă și de (36). Dar

$$\overrightarrow{A_k G} \otimes \overrightarrow{A_k G} = \overrightarrow{GA_k} \otimes \overrightarrow{GA_k}.$$

Prin urmare

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{\vec{I}}_{A_k}(S) = 2\mathcal{M}\vec{\vec{I}}_G(S) \qquad (37)$$

și această relație se explicitează sub forma (34) dacă se exprimă $\vec{\vec{I}}_{A_k}(S)$ cu ajutorul lui (29).

Formula (34) este susceptibilă de numeroase aplicații geometrice, deoarece momentul de inerție I_{Δ_G} al sistemului material (S) față de o axă Δ_G, ce trece prin G și are versorul $\vec{n}$, este dat de

$$I_{\Delta_G} = \vec{u}\,\vec{\vec{I}}_G(S)\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} I_{ij}^{(G)}(S)\alpha_i\alpha_j \qquad (38)$$

unde α_i $(i=1, 2, 3)$ sînt componentele vectorului $\vec{u}$.

Teoremă. *Momentul de inerție $I_{\Delta_G}(S)$ al sistemului material (S) față de axa Δ_G de versor $\vec{u}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ are expresia*

$$I_{\Delta_G}(S) = \frac{1}{2\mathcal{M}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_k m_l [\overrightarrow{A_k A_l}^2 - (\overrightarrow{A_k A_l} \cdot \vec{u})^2]. \qquad (39$$

Demonstrație. Este suficient de a remarca că

$$\vec{u}\,\vec{\vec{E}}\,\vec{u} = \vec{u}(\vec{\vec{E}}\,\vec{u}) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\alpha_j \right) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 = 1.$$

Dacă notăm prin $X_i^{(kl)} (i = 1, 2, 3)$ componentele vectorului $\overrightarrow{A_k A_l}$, avem apoi

$$\vec{u} \cdot [(\overrightarrow{A_k A_l} \otimes \overrightarrow{A_k A_l})\vec{u}] = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \sum_{j=1}^{3} (X_i^{(kl)} X_j^{(kl)})\alpha_j = \left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i X_i^{(kl)} \right)^2 = (\overrightarrow{A_k A_l} \cdot \vec{u})^2,$$

ceea ce conduce la (39).

Observație. Identitatea lui *Lagrange*

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a}\,\vec{b})^2$$

Scanned with OKEN Scanner

în care se face $\vec{a} = \overrightarrow{A_kA_l}$, $\vec{b} = \vec{u}$, conduce la expresia și mai condensată]

$$I_{\Delta_G}(S) = \frac{1}{2\mathcal{M}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_k m_l (\overrightarrow{A_kA_l} \times \vec{u})^2, \tag{40}$$

deoarece $\vec{u}^2 = 1$, sau la

$$I_{\Delta_G}(S) = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{(kl)}^{n} m_k m_l (\overrightarrow{A_kA_l} \times \vec{u})^2, \tag{41}$$

cu convenția de sumare deja precizată

Bibliografie

[1] *C. Iacob*, „*Elemente de Mecanică*", pentru anul IV, liceu, clase speciale de matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.

[2] *C. Iacob*, „*Mecanică teoretică*", Editura Didactică și Pedagogică, București, ed. I, 1971; ed. II, 1980.

[3] *Șt. I. Gheorghiță*, „*Joseph-Louis Lagrange*", Gazeta Matematică, Anul 68, Nr. 3, 1963, p. 139—147.

[4] *V. Bândilă*, „*O generalizare a unei relații a lui Leibniz și aplicarea ei la calculul distanțelor dintre unele puncte remarcabile ale unui triunghi*", Gazeta Matematică, Anul 90, Nr. 2, 1985, p. 35—41.

[5] *A. Leonte-R. Trandafir*, „*Principii și structuri fundamentale în matematica de liceu*" (II), „*Geometrie și Trigonometrie*", Editura Albatros, București, 1986.

[6] *C. Iacob*, „*Asupra unor definiții improprii în geometrie*", Gazeta Matematică, Perf. metodică, Anul VI, nr. 3—4, 1985.

[7] *L. Lur'e*, „*Mécanique analytique*", t. I, Masson, Paris, 1968.

LOGICĂ ȘI GEOMETRIE

III. Deducerea modurilor silogistice

de conf. K. Teleman

Putem spune despre un om că are o gîndire logică dacă emite numai judecăți adevărate. Gîndirea acelui om este creativă, dacă este în măsură să emită judecăți adevărate noi. Scopul învățămîntului este de a forma la fiecare om o gîndire logică creativă.

Pentru a dobîndi o gîndire logică creativă un om trebuie să se sprijine în activitatea sa practică și teoretică numai pe judecăți adevărate și să facă numai raționamente corecte. Dacă nu avem deplină certitudine asupra validității unei anumite judecăți A și dacă din A decurge logic judecata B, atunci nu avem dreptul să afirmăm că judecata B este adevărată, ci putem numai să spunem că dacă A este adevărată, atunci și B este adevărată. În acest caz, dacă la un moment dat ne-am asigurat că judecata A este adevărată, vom putea afirma că și B este adevărată. Dar dacă ajungem la convingerea că B nu este adevărată, atunci trebuie să deducem că nici A nu este adevărată.

Logica generală, inițiată de învățatul grec *Aristotel*, a elaborat Teoria silogismelor, care a jucat un rol central în învățămîntul universitar european în secolele trecute și care se predă și astăzi la facultățile de filozofie. Importanța acordată teoriei silogismelor se explică prin faptul că oamenii fac frecvent silogisme, [dar adesea ei fac silogisme greșite, care poartă numele de *sofisme*. Logica generală are ca prim scop evitarea sofismelor.

Logica matematică a simplificat mult teoria silogismelor, cu ajutorul calculului algebric, arătînd că în realitate există un silogism fundamental și anume:

Dacă orice obiect din A este în B și dacă orice obiect din B este în C, atunci orice obiect din A este în C.

Toate celelalte moduri silogistice se deduc în mod formal din acesta, efectuînd anumite transformări.

Logica matematică este însă o disciplină foarte abstractă, pe care o persoană o poate înțelege numai dacă dispune de o gîndire logică matură. De altfel, întreaga Matematică, și în particular Logica matematică, care este o disciplină a Matematicii, se bazează pe Logica generală.

Scanned with OKEN Scanner

Din această cauză, Logica generală, și în particular Teoria silogismelor, constituie discipline esențiale pentru toți oamenii, fie că sînt matematicieni, fie că au alte specializări, practice sau teoretice.

Importanța silogismelor pentru știință a fost contestată de unii gînditori, printre care putem menționa nume celebre ca *Stuart Mill* și *Henri Poincaré*. În articolul următor ne propunem să arătăm rolul silogismelor în elaborarea demonstrațiilor unor teoreme de geometrie. Scopul nostru imediat este de a face mai clare modurile silogistice date în articolul precedent.

Fiind date două noțiuni A, B, vom nota prin AB noțiunea care se definește adăugînd proprietăților prin care am definit noțiunea A, proprietățile prin care am definit noțiunea B. Dacă totalitatea acestor proprietăți nu este *contradictorie*, atunci simbolul AB reprezintă într-adevăr o noțiune și un obiect aparține acestei noțiuni dacă aparține noțiunii A, cît și noțiunii B. Dacă nu există astfel de obiecte, spunem că noțiunile A, B *se exclud reciproc*, sau că AB este *noțiunea vidă* și scriem $AB = 0$.

În general, simbolurile AB, BA reprezintă aceeași noțiune. Depărtîndu-ne puțin de Logica generală clasică, vom admite că și noțiunea vidă este o noțiune. Dacă noțiunea C este vidă, scriem $C = 0$, în caz contrar, scriem $C \neq 0$.

Noțiunilor A, B le asociem noțiunile $\overline{A}B$ și $A\overline{B}$. Noțiunea $\overline{A}B$ este formată din obiectele care aparțin noțiunii B, dar care nu aparțin noțiunii A.

Noțiunea $A\overline{B}$ se obține schimbînd rolurile lui A și B.

Simbolul $\overline{A}$ singur nu reprezintă o noțiune.

Putem exprima formal judecățile pe care le putem emite asupra a două noțiuni A, B în modul următor:

$a(A, B) \equiv$ orice obiect din A este în B; $A\overline{B} = 0 \leftrightarrow AB = A$

$e(A, B) \equiv$ nici un obiect din A nu este în B; $AB = 0 \leftrightarrow A\overline{B} = A$

$i(A, B) \equiv$ există obiecte în A care sînt și în B: $AB \neq 0$

$o(A, B) \equiv$ există obiecte în A care nu sînt în B: $A\overline{B} \neq 0$.

Cînd avem de comparat mai multe noțiuni $A, B, C, \ldots$, este util să considerăm o *noțiune universală* U, care să generalizeze efectiv fiecare din noțiunile considerate, și care nu este necesar să fie fixată. Deci vom presupune că avem

$$AU = A \neq U,\ BU = B \neq U,\ CU = C \neq U,\ \ldots$$

În continuare, prin $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ vom înțelege noțiunile $\overline{A}U$, $\overline{B}U$, $\overline{C}U$.

Fiind date trei noțiuni A, B, C putem considera figura 1 în care fiecare vîrf, fiecare muchie și fiecare față reprezintă cîte o noțiune. Excepțînd noțiunea $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, în figura 1 sînt reprezentate toate noțiunile care se pot forma cu ajutorul noțiunilor A, B, C.

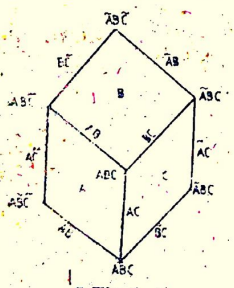


Fig. 1

Făcînd ipoteze asupra unora din aceste noțiuni, putem deduce concluzii asupra altora.

Fiecare mod silogistic conține două premize și o concluzie, care se referă toate la anumite noțiuni reprezentate prin muchii. *Premiza majoră* se referă la una din muchiile $B\tilde{C}$, BC, $\tilde{B}C$, *premiza minoră* se referă la una din muchiile $A\tilde{B}$, AB, $\tilde{A}B$, iar *concluzia* se referă la una din muchiile $A\tilde{C}$, AC, $\tilde{A}C$.

De exemplu primul mod silogistic, aparținînd figurii 1 (numit în Logica generală modul *bArbArA*), se poate scrie formal, scriind la început premiza majoră,

$$(B\tilde{C} = 0) \wedge (A\tilde{B} = 0) \Rightarrow A\tilde{C} = 0.$$

Figura 1 arată clar această implicație: dacă lipsesc muchiile $B\tilde{C}$, $A\tilde{B}$, atunci lipsesc și vîrfurile $\tilde{A}B\tilde{C}$, $AB\tilde{C}$, $A\tilde{B}C$, $\tilde{A}BC$ și va lipsi și muchia $A\tilde{C}$.

Al treilea mod din figura 1 (numit modul *dArII*) se scrie formal

$$(B\tilde{C} = 0) \wedge (AB \neq 0) \Rightarrow AC \neq 0.$$

Din figura 1 se vede într-adevăr că dacă lipsește muchia $B\tilde{C}$, dar este prezentă muchia AB, atunci trebuie să fie prezent vîrful ABC, deci și muchia AC.

Scanned with OKEN Scanner

În această interpretare *lipsa* unei muchii înseamnă lipsa *fiecăruia* din capetele sale, iar *prezența* unei muchii înseamnă prezența *a cel puțin unuia* din capetele sale, deoarece noțiunea reprezentată printr-o muchie coincide cu *suma* (reuniunea) noțiunilor reprezentate prin capetele sale.

Vom presupune că simbolurile A, B, C, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ reprezintă noțiuni nevide. Avem implicațiile:

$$AB = A \Rightarrow AB \neq 0, \quad A\tilde{B} = A \Rightarrow A\tilde{B} \neq 0.$$

Dintr-un mod silogistic care conține o premiză de forma

$$AB \neq 0, \quad A\tilde{B} \neq 0, \quad BC \neq 0, \quad B\tilde{C} \neq 0$$

putem obține un alt mod silogistic, înlocuind acea premiză printr-o premiză corespunzătoare, *mai tare*:

$$AB = A, \quad A\tilde{B} = A, \quad BC = B, \quad B\tilde{C} = B.$$

De asemenea, dintr-un mod silogistic care are concluzia de una din formele

$$AC = A, \quad A\tilde{C} = A$$

putem obține alt mod silogistic, înlocuind acea concluzie prin judecata *mai slabă* corespunzătoare

$$AC \neq 0, \quad A\tilde{C} \neq 0.$$

Alte transformări permise, care permit să se obțină moduri silogistice noi din moduri deja formate, constau în a efectua una, două sau trei înlocuiri de forma

$$(T): \ A \rightsquigarrow \tilde{A}, \ B \rightsquigarrow \tilde{B}, \ C \rightsquigarrow \tilde{C}.$$

Exerciții. 1. Să se explice pe figura 1 toate modurile silogistice.

2. Să se arate cum se pot obține alte moduri silogistice clasice din modurile *bArbArA* și *dArII*, efectuînd transformările indicate mai sus și folosind formula generală $PQ = QP$, validă oricare ar fi noțiunile P, Q.

Observație. Am precizat în articolul precedent că oricare din silogismele clasice are cel puțin o premiză universală și cel puțin o premiză afirmativă.

Logicianul român *F. Tufugan* a pus în evidență silogismul

$$(AB = 0) \wedge (BC = 0) \Rightarrow \tilde{A}\tilde{C} \neq 0$$

care are ambele premize negative.

Corectitudinea acestui silogism apare clar în figura 1, avînd în vedere ipoteza $B \neq 0$. Într-adevăr, din premizele $AB = 0$, $BC = 0$ rezultă $B = \tilde{A}B\tilde{C} = B(\tilde{A}\tilde{C})$ și $B \neq 0$ implică $\tilde{A}\tilde{C} \neq 0$.

Simbolul $\tilde{A}\tilde{C}$, potrivit convențiilor făcute, reprezintă noțiunea $\overline{A \cup C}$.

În încheiere, ca ilustrare a felului în care erau prezentate modurile silogistice în Logica generală scolastică, enumerăm denumirile date acestor moduri. Fiecare denumire conține vocalele *a*, *e*, *i*, *o* care indică felurile judecăților ce apar ca premiză majoră, premiză minoră și concluzie în fiecare mod: *bArbArA, cElArEnt, dArII, fErIO, CEsArE, cAmEstrEs, fEstInO, bArOcO, dArAptI, dIsAmIs, dAtIsI, fElAptOn, bOcAraO, fErIsOn, brAmAntIp, cAmEnEs, dImArIs, fEsApO, frEsIsOn*. Aceste denumiri mnemotehnice au fost date de *Petrus Hispanus*.

MATEMATICĂ — INFORMATICĂ — BIOTEHNOLOGIE?

de Manuela Aprahamian Mateescu, matematician, București

Această scurtă notă este inspirată dintr-o frumoasă metaforă făcută de către Acad. *N. Teodorescu* în G. M. nr. 11/1985 pag. 406, referitoare la tinerețea rubricii de informatică și la implicațiile ei din ce în ce mai pregnante în științele naturii.

Vom încerca să introducem o serie de noțiuni și totodată să deschidem o cale de acces spre o știință a mileniului III, Biotehnologia. Limbajul matematic folosit sperăm să convingă cititorul.

Scanned with OKEN Scanner

O mulțime finită și nevidă, Σ, se numește *alfabet* iar elementele ei se numesc *litere*. *Mulțimea cuvintelor nevide* peste Σ este $\Sigma^+ = \{a_0a_1 \ldots a_n / n \in \mathbf{N},\ a_i \in \Sigma, 0 \leqslant i \leqslant n\}$. Considerăm un cuvînt special, notat cu λ, numit *cuvîntul vid*, și fie $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\lambda\}$. Mulțimea Σ^* se numește *mulțimea cuvintelor* peste Σ. Definim o operație binară pe Σ^*, numită *concatenare* și notată cu $\cdot$. Dacă $u, v \in \Sigma^+$, $u = a_0a_1 \ldots a_n$ și $v = b_0b_1 \ldots b_m$ atunci $u \cdot v = a_0a_1 \ldots a_nb_0b_1 \ldots b_m$. Mai mult, pentru orice $u \in \Sigma^+$, $u \cdot \lambda = \lambda \cdot u = u$. Se poate arăta că $(\Sigma^+, \cdot)$, respectiv $(\Sigma^*, \cdot)$, formează un semigrup, respectiv un monoid cu elementul unitate λ. Mulțimile Σ^+, Σ^* se mai numesc și *semigrupul* respectiv *monoidul liber general* de Σ deoarece satisfac o importantă *proprietate de universalitate* și anume, pentru orice semigrup M respectiv monoid M, pentru orice funcție $h : \Sigma \to M$ există și este unic un homomorfism de semigrupuri, respectiv de monoizi, $\bar{h} : \Sigma^+ \to M$, respectiv $\bar{h} : \Sigma^* \to M$ astfel încît $\bar{h}(a) = h(a)$, pentru orice $a \in \Sigma$. De obicei $\bar{h}$ se notează tot cu h și deasemenea concatenarea $\cdot$, nu se mai scrie. Un *limbaj* peste Σ este orice mulțime L, $L \subseteq \Sigma^*$.

Limbajele de programare *FORTRAN, COBOL, BASIC* etc. precum și limbile naturale ca *LIMBA ROMÂNĂ* și altele, din punct de vedere matematic, se pot trata într-un astfel de cadru. Matematicienii, lingviștii, biologi etc. au inventat o mare diversitate de metode de a descrie limbajele. Mai mult, se cunosc numeroase legături între limbaje, algoritmi, funcții (parțial) recursive etc.

Prezentăm în continuare o metodă de descriere a limbajelor, inventată de biologul *M. Lindenmayer* în 1968, metodă cu largi aplicații în biotehnologie.

Un sistem OL *deterministic* (DOL) este un triplet $S = (\Sigma, s, h)$, unde Σ este un alfabet, $s \in \Sigma^+$ este *cuvîntul inițial* sau *sămînța* iar $h : \Sigma \to \Sigma^*$ este o funcție care descrie *producțiile*. Dacă $\bar{h} : \Sigma^* \to \Sigma^*$ este homomorfismul definit de h, care se obține din proprietatea de universalitate, atunci, *limbajul generat* de S, notat $L(S)$, este :

$$L(S) = \bigcup_{n \geqslant 0} \bar{h}^{(n)}(s),$$

unde $\bar{h}^{(n)}$ desemnează compunerea lui $\bar{h}$ cu el însuși de n ori dacă $n \geqslant 1$ și $\bar{h}^{(0)}$ este identitatea.

Următorul exemplu de DOL credem că este edificator. Definim $S = (\Sigma, a, h)$ unde $\Sigma = \{a, b\}$, $h(a) = b$ și $h(b) = ab$. Cititorul poate constata ușor că $L(S)$ este infinit și este format din cuvintele a, b, ab, bab, $abbab$, $babbabab$ etc.

Mai mult, se poate demonstra că lungimile cuvintelor din $L(S)$ formează exact șirul lui *Fibonacci*.

Este interesant poate de amintit că *Fibonacci* (1170—1270) a definit celebrul șir studiind o problemă foarte naturală, aceea a înmulțirii iepurilor de casă.

Azi, după atîtea sute de ani, matematica și informatica sînt chemate să-și aducă aportul la dezvoltarea Bioingineriei genetice, Biochimiei, Biotehnologiei etc.

Încheiem cu un exemplu simplu de problemă complet rezolvată :

Problemă. Dacă $S = (\{a\}, a, h)$ este un DOL, cu $h(a) = aa$, atunci $L(S) = \{a^{2^n} / n \geqslant 0\}$.

Soluție. Demonstrăm întîi că $L(S) \subseteq \{a^{2^n} / n \geqslant 0\}$. Arătăm că dacă $w \in L(S)$ atunci există $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $w = a^{2^n}$. Această afirmație o demonstrăm prin inducție după n. Dacă $w \in L(S)$ atunci există $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $w \in \bar{h}^{(n)}(a)$. Dacă $n = 0$ atunci $w \in \bar{h}^{(0)}(a) = a$ și deci $w = a^{2^0}$.

Presupunem adevărată ipoteza că dacă $w \in \bar{h}^{(n)}(a)$ atunci $w = a^{2^n}$ și fie $w \in \bar{h}^{(n+1)}(a)$. Deoarece $\bar{h}^{(n+1)}(a) = \bar{h}(\bar{h}^{(n)}(a))$, rezultă că există $u \in \bar{h}^{(n)}(a)$ astfel încît $w \in \bar{h}(u)$.

Conform ipotezei inductive $u = a^{2^n}$ și deci $w \in \bar{h}(a^{2^n})$.

Deoarece $\bar{h}$ este un homomorfism rezultă că $w = [\bar{h}(a)]^{2^n}$. Mai mult, $\bar{h}(a) = h(a) = aa$ și deci $w = (aa)^{2^n} = a^{2^{n+1}}$.

Pentru a arăta incluziunea contrară, $L(S) \supseteq \{a^{2^n} / n \geqslant 0\}$, se poate proceda analog.

UNELE PROPRIETĂȚI ALE TERMENILOR ȘIRULUI LUI LUCAS

de Ion Colculescu, elev, Tg. Jiu

Șirul lui *Lucas* este un șir liniar recurent de ordin 2 format din numere naturale, $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ unde $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, (\forall) n \in \mathbf{N}$ și $L_0 = 2$, $L_1 = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Desigur se poate determina forma termenului general al şirului lui *Lucas*, $L_n = A \cdot X_1^n + B \cdot X_n^2$, unde X_1, X_2 sînt rădăcinile ecuaţiei caracteristice $X^2 - X - 1 = 0$, ar constantele A şi B se determină din condiţiile iniţiale.

Mai întîi, vom prezenta două proprietăţi, ce rezultă din următoarea

Propoziţie: a) $L_1 + L_3 + \ldots + L_{2n+1} = L_{2n+2} - 2$

b) $L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Demonstraţie. a) $L_1 + L_3 + \ldots + L_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} L_{2k+1} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} (L_{2k+2} - L_{2k}) = L_{2n+2} - L_0 = L_{2n+2} - 2.$$

b) $L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_{n+1}^2 = \sum_{k=0}^{n} L_{k+1}^2 = \sum_{k=0}^{n} (L_{k+2} L_{k+1} - L_k L_{k+1}) =$

$= L_{n+2} L_{n+1} - L_0 L_1$. Deci: $L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_n^2 = L_{n+1} L_n - 2$.

În continuare, urmînd calea din [1], vom deduce cîteva proprietăţi ale termenilor şirului lui *Lucas*.

Aşadar, fie matricea $A \in M_2(\mathbf{N})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se observă că :

$$A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Propoziţia 1. $L_n^2 - L_{n+1} L_{n-1} = 5(-1)^n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. (2)

Demonstraţie. Avem $\det A^n = (\det A)^n$ şi conform cu (1) rezultă (2).

Propoziţia 2. $L_{mn}^2 - L_{mn+1} L_{mn-1} = (-5)^n (L_m^2 - L_{m+1} L_{m-1})^n$, $(\forall)\ m, n \in \mathbf{N}^*$, (3)

Demonstraţie. Avem $A^{mn} = (A^m)^n$. Deci $\det A^{mn} = (\det A^m)^n$, iar acum, ţinînd cont de (2) rezultă (3).

Propoziţia 3.

$$5L_{m+n+1} = L_{m+1} L_{n+1} + 2L_m \cdot L_{n+1} + 2 L_n \cdot L_{m+1} - L_m L_n, (\forall) m, n \in \mathbf{N}^*, \tag{4}$$

Demonstraţie. Avem $A^{m+n} = A^m \cdot A^n$, $(\forall) m, n \in \mathbf{N}^*$.

Notînd $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ avem $\det B = -5 \neq 0$ deci B este inversabilă şi înmulţind în relaţia $A^{m+n} = A^m \cdot A^n$ cu inversa matricei B la dreapta obţinem :

$$5 \begin{pmatrix} L_{m+n+1} & L_{m+n} \\ L_{m+n} & L_{m+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}$$

de unde se obţine imediat (4).

În final, în legătură cu problema lui *V. E. Nogatt* [2] propunem cititorilor următoarea

Problemă.

Să se arate că orice număr natural $n \geqslant 1$ se poate scrie ca sumă de termeni distincţi ai şirului lui *Lucas*.

BIBLIOGRAFIE :

[1] *Asupra unei note din „The Math. Gazette"*, de Al. Lupaş, G. M. nr. 11/82.

[2] *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor*, I. Cucuruzeanu, Ed. Tehnică.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME DIN MANUALE

Problema 4* pag. 115 din manualul de Geometrie, clasa a VIII-a, ed. 1985

Prezentată de Ion Pătraşcu, profesor, Băileşti

Fie a, b, c, d, patru drepte oarecare în spaţiu. Să se construiască un trapez având cîte un vîrf al unei baze pe a, b şi celălalt vîrf pe celelalte baze pe c, d. Să se efectueze construcţia:

a) *vîrfurile pe a, b sînt date*

b) *vîrfurile pe a, c sînt date.*

Soluţie. a) Dacă A şi B sînt cunoscute şi aparţin respectiv dreptelor a, b, construcţia trapezului $ABCD$ revine la rezolvarea următoarei probleme:

Să se construiască o dreaptă CD care se sprijină pe două drepte date c, d şi este paralelă cu dreapta AB dată.

Această problemă este rezolvată în respectivul manual la pag. 14—15 aşa că schiţăm soluţia ei.

Printr-un punct oarecare M al dreptei d ducem o paralelă g la AB. Această paralelă g împreună cu d determină planul α. Dacă dreapta c intersectează planul α în C, atunci paralela la AB dusă prin C, este conţinută în α şi intersectează dreapta d în D astfel încît $ABCD$ este trapez.

Observaţia 1. Dacă dreapta c este paralelă cu α, atunci problema nu admite soluţie.

Se poate demonstra că dacă problema admite soluţie atunci aceasta este unică.

b) Punctul A şi dreapta b determină planul α, iar punctul C şi dreapta d determină planul β. Planul trapezului care trebuie construit va intersecta aceste două plane după dreptele AB şi CD paralele.

Dacă planele α şi β sînt paralele atunci alegînd pe b un punct B astfel ca dreapta AB să nu fie paralelă cu d, intersecţia planului (ABC) cu d este punctul D, iar $ABCD$ este trapez.

Observaţia 2. În cazul precedent ($\alpha \| \beta$), problema are o infinitate de soluţii.

Dacă planele α şi β se intersectează după dreapta e şi nici una dintre dreptele b, d nu este paralelă cu e, problema are soluţie unică şi aceasta se obţine ducînd prin dreapta AC un plan γ paralel cu e. Într-adevăr, în baza unei teoreme (intersecţiile unui plan paralel cu dreapta de intersecţie a două plane, cu aceste plane sînt drepte paralele) rezultă că γ intersectează dreptele b şi d în B, D, iar patrulaterul $ABCD$ este trapez.

Observaţia 3. Dacă una din dreptele b, d intersectează dreapta e, problema nu admite soluţie.

Problema nr. 24, pag. 88, din Manualul de Geometrie, cl. a X-a, ed. 1985

prezentată de Maria Pârvu şi Marin Goşoniu, profesori, Bucureşti

Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură a. Pe semidreptele $[CB$, $[CD$, $[CC'$ se iau respectiv punctele P, Q, R astfel ca $(CP) \equiv (CQ) \equiv (CR)$ şi $CP = x$. Să se calculeze aria şi perimetrul secţiunii cubului prin planul (PQR). (Discuţie).

Vom rezolva problema în mai multe etape.

Pasul 1. Pentru x variabil, planul (PQR) rămîne paralel cu planele $(BC'D)$ şi $(AB'D')$.

Într-adevăr, deoarece triunghiul PCR este dreptunghic isoscel (fig. 1), reciproca teoremei lui *Thales* în $\Delta BCC'$ ne asigură că $PR \| BC'$. Analog $QR \| DC'$, adică $(PQR) \| (BC'D)$.

În plus, să mai remarcăm că $AD' \| BC'$ şi $B'D' \| BD$, deci $(AB'D') \| (BDC')$.

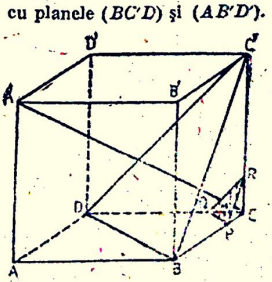


Fig. 1

Pasul 2. Avem $A'C \perp (PQR)$.

Ţinînd seama de Pasul 1, acest fapt va fi demonstrat dacă arătăm că $A'C \perp (BC'D)$.

Pentru aceasta să observăm că tetraedrul $[A'BC'D]$ este regulat, deci înălţimea lui din A' cade în centrul cercului circumscris bazei $[BC'D]$. Tot în centrul cercului circumscris triunghiului $BC'D$ cade şi înălţimea din C în tetraedrul $[CBC'D]$, deoarece acest tetraedru are muchiile $[CB]$, $[CD]$, $[CC']$ congruente. Perpendicularele din A' şi C pe planul $(BC'D)$ cad în acelaşi punct, deci $A'C \perp (BC'D)$ (am ţinut seama de unicitatea perpendicularei pe un plan, într-un punct al planului).

Scanned with OKEN Scanner

Pasul 3. Să calculăm distanțele de la punctul C la planele $(BC'D)$, $(AB'D')$ și (PQR) pentru x arbitrar.

Fie $A'C \cap (PQR) = \{M\}$. Avem:

$$RM = \frac{2}{3} \cdot \frac{PR\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{6}}{3}, \text{ deci } CM = \sqrt{CR^2 - RM^2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Distanța de la C la planul $(C'BD)$ este deci $\frac{x\sqrt{3}}{3}$, ca și distanța de la A' la planul $(AB'D')$. Atunci distanța de la C la planul $(AB'D')$ este $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Remarcăm că planele $(C'BD)$ și $(AB'D')$ determină pe segmentul $A'C$ trei segmente congruente.

Pasul 4. Din pasul 1 rezultă că $(BC'D)$ și $(AB'D')$ sînt două poziții particulare ale planului (PQR). În funcție de aceste două poziții distingem trei cazuri în stabilirea formei secțiunii:

Cazul I — planul de secțiune se află între punctul C și planul $(BC'D)$;
Cazul II — planul de secțiune se află între planele $(BC'D)$ și $(AB'D')$,
Cazul III — planul de secțiune se află între planul $(AB'D')$ și punctul A'.

Ținînd seama de cele stabilite la Pasul 3, aceste trei cazuri se pot delimita și astfel:

Cazul I: $0 < \frac{x\sqrt{3}}{3} \leqslant \frac{a\sqrt{3}}{3}$ adică $x \in (0, a]$.

Cazul II: $\frac{a\sqrt{3}}{3} < \frac{x\sqrt{3}}{3} \leqslant \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, adică $x \in (a, 2a]$,

Cazul III: $\frac{2a\sqrt{3}}{3} < \frac{x\sqrt{3}}{3} \leqslant a\sqrt{3}$, adică $x \in (2a, 3a]$.

Să examinăm pe rînd fiecare situație.

Cazul I, $x \in (0, a]$.

În acest caz secțiunea este triunghiul PQR, echilateral, de latură $x\sqrt{2}$, după cum rezultă în mod evident din triunghiurile dreptunghice isoscele CPQ, CQR, CRP. Aria secțiunii este $\frac{(x\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$, iar perimetrul $3x\sqrt{2}$.

Cazul II. $x \in (a, 2a]$.

Fie $PR \cap BB' = \{P'\}$ și $PR \cap C'B' = \{R'\}$ (vezi fig. 2).

Triunghiul PCR fiind dreptunghic isoscel, avem imediat că și triunghiul $C'RR'$ este dreptunghic isoscel, deci $C'R' = C'R = x - a$. Analog $PB = BP' = x - a$.

De asemenea, dacă notăm cu R'' și Q' intersecțiile dreptei RQ cu muchiile $[C'D']$, respectiv $[DD']$, iar cu Q'', P'' intersecțiile dreptei PQ cu muchiile $[AD]$, respectiv $[AB]$, atunci

$$C'R'' = QD = DQ' = x - a \text{ și } DQ = DQ'' = PB = P''B = x - a.$$

Avem deci șirurile de egalități:

$$BP = BP' = BP'' = C'R = C'R' = C'R'' = DQ = DQ' = DQ'' = x - a \text{ și}$$

$$B'P' = B'R' = D'R'' = D'Q' = AQ'' = AP'' = a - (x - a) = 2a - x.$$

Secțiunea este deci hexagonul $PR'R''Q'Q''P''$ în care

$$R'R'' \parallel P''Q'', \; R'P' \parallel Q'Q'', \; Q'R'' \parallel P'P'' \text{ și}$$

$$R'R'' = Q'Q'' = P'P'' = (x - a)\sqrt{2}, \text{ iar } P''Q'' = R'P' = Q'R'' = (2a - x)\sqrt{2}.$$

Perimetrul hexagonului se calculează imediat:

$$P(x) = 3(x - a) \cdot \sqrt{2} + 3(2a - x) \cdot \sqrt{2} = 3a\sqrt{2}.$$

În ce privește aria, să observăm că

$$\sigma[P'R'R''Q'Q''P''] = \sigma[PQR] - 3 \cdot \sigma[RR'R''],$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece triunghiurile $RR'R''$, $PP'P'$, $QQ'Q''$ sînt echilaterale, de latură $(x-a)\sqrt{2}$. Deci

$$\sigma(x) = \frac{(x\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{(x-a)\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}ax - \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

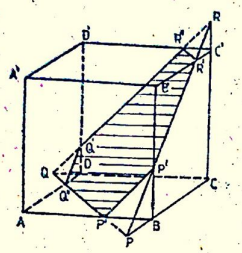


Fig. 2

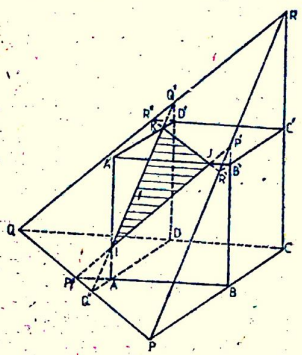


Fig. 3

Această expresie are, evident, un maxim egal cu $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, realizat pentru $x = \frac{3a}{2}$. În acest caz hexagonul unește mijloacele laturilor pe care le intîlnește în cub, deci este hexagon regulat.

Cazul III. $x \in (2a, 3a]$.

Vom adopta notațiile de la cazul anterior, dar acum punctele P', P'', Q', Q'', R', R'' se vor afla pe prelungirile laturilor $[BB']$, $[BA]$, $[DD']$, $[DA]$, $[C'B']$, $[C'D']$ ale cubului. Planul (PQR) intersectează fața $[A'B'C'D']$ a cubului după dreapta $R'R''$, fața $[AA'B'B]$ după dreapta $P'P''$, iar fața $[AA'D'D]$ după dreapta $Q'Q''$. Fie I, J, K punctele de intersecție ale planului (PQR) cu muchiile $[AA']$, $[A'B']$, $[A'D']$ (fig. 3). Avem de calculat aria triunghiului IJK.

Avem: $R'B' = R'C' - B'C' = RC' - B'C' = (x-a) - a = x - 2a$ și cum $C'R' = C'R = C'R''$, rezultă și $R'B' = JB'$.

Nu mai este o greutate a observa că $A'I = A'J = A'K$.

În triunghiul $A'KJ$ avem:

$$A'J = a - (x-2a) = 3a - x \text{ și } KJ = (3a-x)\sqrt{2}.$$

Deci $\sigma[IJK] = \frac{(3a-x)^2\sqrt{3}}{2}$, iar perimetrul este $P(x) = 3(3a-x)\sqrt{2}$.

Prin urmare, dacă notăm cu $P(x)$ și $\sigma(x)$ perimetrul, respectiv aria secțiunii determinate în cub de planul (PQR), atunci avem:

$$P(x) = \begin{cases} 3x\sqrt{2}, & \text{dacă } x \in (0,a] \\ 3a\sqrt{2}, & \text{dacă } x \in (a,2a] \\ 3(3a-x)\sqrt{2}, & \text{dacă } x \in (2a,3a] \end{cases}$$

$$\text{și } \sigma(x) = \begin{cases} \frac{x^2\sqrt{3}}{2}, & \text{dacă } x \in (0,a] \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(-2x^2 + 6ax - 3a^2), & \text{dacă } x \in (a,2a] \\ \frac{(3a-x)^2\sqrt{3}}{2}, & \text{dacă } x \in (2a,3a]. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x \geq 3a$ funcțiile sînt nule.
Graficele acestor funcții sînt date în figurile 4 și 5

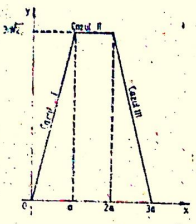


Fig. 4

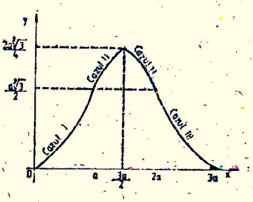


Fig. 5

CONCURSUL DE MATEMATICĂ, PENTRU GIMNAZII, ETAPA REPUBLICANĂ, RM. VÎLCEA — 1986

Clasa a VI-a

1. Să se afle numerele naturale de trei cifre $\overline{xyz}$ cu proprietatea că $\dfrac{34}{x^2+y^2+z^2}$ este număr natural.

2. O bunică are doi nepoți. Vîrsta bunicii se exprimă printr-un număr de două cifre, fiecare cifră fiind vîrsta unuia dintre nepoți. Dacă la vîrsta bunicii se adaugă vîrstele celor doi nepoți se obține 83 ani. Ce vîrstă are bunica?

3. Fie OAB un triunghi isoscel cu $OA \equiv OB$. Se prelungește OB cu un segment $OC \equiv OB$. Prin C se duce paralela la AB care intersectează dreapta OA într-un punct D. Perpendiculara pe AB într-un punct oarecare M al segmentului AB, intersectează pe BC în punctul N și pe AD în punctul P. Arătați că:

a) $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$.

b) $MN + MP =$ constant, adică nu depinde de alegerea lui M pe AB.

Clasa a VII-a

Lucrarea de algebră

1. Fie x, y, z numere reale. Să se arate că:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$.

b) Dacă $x + y + z = 1$, deduceți că: $x^2 + y^2 + z^2 \geq \dfrac{1}{3}$.

* * *

2. Fie a, b, c numere reale, $m \neq 0$. Dacă $a + 2b + 3c = 7m$, atunci

$$(a - m)^2 + (b - 2m)^2 + (c - 3m)^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

* * *

Scanned with OKEN Scanner

3. Se consideră $S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, cu n număr natural nenul. Să se determine valoarea lui n pentru ca suma S să aibă valoarea 10.

V. Brînzănescu, N. Păuna

4. Determinați numerele raționale nenule x pentru care $x + \frac{1}{x}$ este întreg. Verificați că în acest caz $x^n + \frac{1}{x^n}$ este întreg oricare ar fi n natural.

V. Brînzănescu

Lucrarea de geometrie

1. Fie $ABCD$ un trapez oarecare cu bazele AB, CD și O intersecția diagonalelor AC și BD. Paralela prin O la baze taie laturile neparalele în M și N. Să se arate că $OM \equiv ON$ și că $\frac{MN}{AB} + \frac{MN}{CD} = 2$.

2. Fie ABC un triunghi avînd lungimile laturilor: $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$ și $BC = a\sqrt{3}$. Notăm cu P piciorul înălțimii din A pe BC și M, N proiecțiile lui P pe laturile AB, respectiv AC. Calculați lungimea segmentului MN în funcție de a.

3. Se dau două cercuri de centre O_1 și O_2 care se taie în punctele A și B. Fie C și D punctele diametral opuse lui A în cele două cercuri. Tangenta la cercul O_1 dusă prin A taie din nou cercul O_2 în M, iar tangenta la cercul O_2 dusă prin A taie din nou cercul O_1 în N. Prelungim segmentul AB cu un segment BP astfel încît B să fie mijlocul segmentului AP. Să se arate că:

a) Punctele C, B și D sînt coliniare.

b) Patrulaterul $AMPN$ este inscriptibil.

4. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și fie E intersecția dreptelor AB, CD, iar F intersecția dreptelor BC, AD. Bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{AFB}$ taie laturile AB, CD în P, respectiv M, iar bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{AED}$ taie laturile AD, BC în Q, respectiv N. Să se arate că $MNPQ$ este romb.

Clasa a VIII-a

Lucrarea de algebră

1. Să se determine numerele reale a astfel încît oricare ar fi x și y reali, să aibă loc inegalitatea:

$$2a(x^2 + y^2) + 4axy - y^2 - 2xy - 2x + 1 \geqslant 0.$$

I. Mitrache

Scanned with OKEN Scanner

2. Să se afle numerele naturale nenule $x; y; z$ ce verifică egalitatea

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{30}{13}.$$

V. Brînzănescu

3. Fie x, y, z, u, v, w numere reale nenule care verifică condițiile:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1 \text{ și } \frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = 0.$$

a) Să se arate că $\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} + \frac{z^2}{w^2} = 1.$

b) Folosind eventual punctul a), să se arate că $\frac{u^2}{x^2} + \frac{v^2}{y^2} + \frac{w^2}{z^2} \geqslant 9.$

V. Brînzănescu, N. Păuna

4. Să se determine numerele reale a și b astfel încît polinomul

$$P(X) = aX^{n+2} + bX^{n+1} + X$$

să se dividă cu $(X-1)^2$.

A. Olaru

Lucrarea de geometrie

1. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a și picioarele M și N ale perpendicularelor din D', respectiv B pe diagonala $B'D$. Demonstrați că:

a) Patrulaterul $BND'M$ este paralelogram.

b) Lungimea segmentului MN este o treime din lungimea segmentului $B'D$.

M. Trifu, I. Diaconu

2. Fie $ABCD$ un tetraedru astfel încît $DA \perp DB$, $DA \perp DC$ și $DB \perp DC$.

a) Să se arate că pătratul ariei feței ABC este egal cu suma pătratelor ariilor fețelor $DA'B$, DAC, DBC.

b) Ducem $DM \perp AB$ $(M \in AB)$ și $DN \perp AC$ $(N \in AC)$. Să se arate că patrulaterul $BCNM$ este inscriptibil.

I. Diaconu

3. Fie $ABCD$ un tetraedru. Presupunem că perpendiculara AE dusă din A pe fața BCD se intersectează cu perpendiculara BF din B pe fața ACD într-un punct G.

a) Să se arate că perpendiculara GK dusă din G pe fața ABD și perpendiculara DL dusă din D pe fața ABC se intersectează într-un punct M.

b) Să se arate că dreapta GM intersectează muchiile AB și CD.

V. Brînzănescu

Scanned with OKEN Scanner

4. Dintr-un punct A exterior unui plan se duc perpendiculara AO și oblicele AB, AC față de acest plan, astfel încît O, B, C nu sînt coliniare. Fie H și H' ortocentrele triunghiurilor ABC, respectiv OBC. Să se arate că dreapta HH' este perpendiculară pe planul ABC.

V. Brînzănescu

SOLUȚIILE PROBLEMELOR DATE LA CONCURSUL DE MATEMATICĂ, ETAPA PE ȚARĂ, ARAD, 6—12 APRILIE 1986

prezentate de

D. M. Bătinețu-Giurgiu, I. V. Maftei și Marcel Țena

A. ENUNȚURI

Clasa a IX-a

1. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$. Să se rezolve ecuația $(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x$, știind că admite o rădăcină întreagă.

Mircea Becheanu

2. Să se arate că centrul cercului înscris într-un triunghi aparține interiorului triunghiului care are vîrfurile în mijloacele laturilor triunghiului dat.

* * *

3. Se dă funcția $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$, $f(x) = \left[\frac{ax + b}{cx + d}\right]$ unde $a, b, c, d \in \mathbf{N}$ și $c + d \neq 0$. Să se arate că f este injectivă dacă și numai dacă $c = 0$ și $a \geqslant d$.

Marcel Chiriță și Mihai Piticari

4. Se dă triunghiul ascuțitunghic ABC. Se notează cu $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului, cu A', B', C' respectiv intersecțiile înălțimilor triunghiului ABC cu cercul $\mathcal{C}$, $A'B' \cup BC = \{M\}$, $A'B' \cap BC = \{N\}$, $A'B' \cap AC = \{P\}$, $B'C' \cap AC = \{Q\}$, $B'C' \cap AB = \{R\}$, $C'A' \cap AB = \{S\}$. Să se arate că dreptele MQ, NR, PS sînt concurente.

Orest Bucicovschi

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuația:

$$8^x + 27^x + 64^x + 125^x = 24^x + 30^x + 40^x + 60^x.$$

I. V. Maftei

2. Fie P un punct situat în interiorul unui triunghi; x, y, z distanțele de la P la vîrfurile A, B, C ale triunghiului, iar p, q, r distanțele lui P la laturile $[BC]$, $[CA]$ și $[AB]$. Să se arate că $xyz \geqslant (q + r)(r + p)(p + q)$.

* * *

3. Fie A o submulțime a mulțimii numerelor complexe $\mathbf{C}$ cu proprietățile: a) A conține orice număr $z \in \mathbf{C}$ cu $|z| = 1$; b) Pentru orice $z_1, z_2 \in A$ avem $z_1 + z_2 \in A$. Să se demonstreze că $A = \mathbf{C}$.

Marcel Țena

4. Să se rezolve ecuația $4a^2 \sin(x + B) \sin(x + C) = (b + c)^2 + 2bc$ unde a, b, c sînt lungimile laturilor, iar B și C măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a

1. Să se determine toate polinoamele $P \in \mathbf{R}[X]$ pentru care $P(\sin x) = P(\operatorname{tg} x) \cdot P(\cos x)$, $(\forall)\, x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Vladimir Mașek

2. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ definit prin $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ și $x_0 \in \mathbf{R}$. Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{\ln n} = 1$.

* * *

3. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{R})$. Să se arate că $\operatorname{rang}(A) \leqslant 1$ dacă și numai dacă există $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbf{R}$ și $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$ așa încît $a_{ij} = x_i y_j$ oricare ar fi $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$.

* * *

4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ așa încît $AB = BA$. Să se demonstreze că $\det(A + B) \geqslant 0$ dacă și numai dacă $\det(A^n + B^n) \geqslant 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

* * *

Clasa a XII-a

1. Fie $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă. Să se arate că funcția $g : [0,1] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x^2)$ este integrabilă.

Sorin Rădulescu

2. Să se arate că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} (1 + \sin x \cos^2 x) \, dx.$$

Vladimir Mașek

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup necomutativ cu 8 elemente și e elementul său neutru, $a \in G$ un element de ordinul 4 și $b \in G - \{e, a, a^2, a^3\}$. Să se arate că $G = \{e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$, $ab = ba^3$ și $b^2 \in \{e, a^2\}$.

* * *

4. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural. Să se arate că afirmațiile următoare sînt echivalente:

a) Numărul elementelor inversabile ale inelului $\mathbf{Z}_n$ este egal cu numărul elementelor neinversabile;

b) Există $k \in \mathbf{N}^*$ așa încît $n = 2^k$.

Marcel Țena

B. SOLUȚII

Clasa a IX-a

1. Ecuația dată se scrie sub forma echivalentă:

$$(a^2 + b^2)x^2 - (4ab + 1)x + a^2 + b^2 = 0, \tag{1}$$

Dacă $a = b = 0$ ecuația (1) este de gradul întîi și are unica soluție $x_1 = 0$.

Să presupunem acum că $a \neq 0$ sau $b \neq 0$; în acest caz ecuația (1) este de gradul al doilea cu rădăcinile x_1, x_2 unde $x_1 \in \mathbf{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $x_1 = (ax_1 - b)^2 + (bx_1 - a)^2$ deducem că $x_1 \in \mathbf{N}$. Deoarece rădăcinile sînt reale rezultă că discriminantul ecuației este pozitiv, adică $(4ab+1)^2 - 4(a^2+b^2)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (1-2(a-b)^2)(1+2(a+b)^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1-2(a-b)^2 \geqslant 0$ și deoarece $(a-b)^2 \in \mathbf{N}$ rezultă în mod necesar $(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Ecuația (1) devine:

$$2a^2x^2 - (4a^2+1)x + 2a^2 = 0, \qquad (2)$$

și conform relațiilor lui *Viète* deducem:

$$x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2}; \quad x_1x_2 = 1.$$

Am văzut că $x_1 \in \mathbf{N}$, dar se observă imediat că $x_1 = 0$ nu poate fi rădăcină pentru ecuația (2) și de asemenea $x_1 = 1$ nu poate fi rădăcină pentru ecuația (2).

În concluzie, $x_1 \geqslant 2$. Deoarece $x_2 = x_1^{-1} > 0$ deducem că $x_1 < x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2} < 3$. Prin urmare $2 \leqslant x_1 < 3$ de unde rezultă $x_1 = 2$. Deci, $x_2 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2}$. Înlocuind valorile obținute în egalitatea $x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2}$ rezultă $a^2 = 1$ de unde deducem $a \in \{-1, 1\}$.

Așadar în cazul $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, singura posibilitate pentru a fi satisfăcută ecuația din enunț este $a = b = \pm 1$ și rădăcinile ecuației sînt $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

2. Fie ABC triunghiul dat, I centrul cercului înscris și M, N, P, mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Să notăm cu $T \in (BC)$ punctul de contact al cercului înscris cu latura BC, cu S punctul diametral opus lui T în cercul înscris și în sfîrșit fie $D \in BC$ piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC.

Este clar că toate punctele cercului înscris, cu excepția celor trei puncte de contact cu laturile triunghiului, aparțin interiorului triunghiului. Deoarece S aparține cercului înscris și nu este punct de contact (dacă S ar fi punct de contact cu $[AB]$ sau cu $[AC]$, ar rezulta $AB \| BC$ sau $AC \| BC$, ceea ce nu se poate) deducem că $S \in \operatorname{Int} ABC$. Deci $TS < AD$, ceea ce este echivalent cu $TI < \frac{1}{2} AD$. Aceasta înseamnă că I aparține semiplanului deschis limitat de dreapta PN, care conține punctul M. Analog, I aparține semiplanelor deschise limitate de MP și MN, conținînd respectiv punctele N și P.

În concluzie I aparține intersecției celor trei semiplane deschise amintite, care este tocmai interiorul triunghiului MNP.

3. ($\Leftarrow$). Să presupunem $c = 0$ și $a \geqslant d$. Atunci pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ putem scrie

$$f(n+1) = \left[\frac{a(n+1)+b}{d}\right] = \left[\frac{an+b}{d} \oplus \frac{a}{d}\right] \geqslant \left[\frac{an+b}{d} + 1\right] = \left[\frac{an+b}{d}\right] + 1 = f(n) + 1 >$$

$> f(n)$. Prin urmare, $f(n+1) > f(n)$. $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, ceea ce arată că f este strict crescătoare pe $\mathbf{N}^*$, și deci este injectivă.

($\Rightarrow$). Să presupunem că f este injectivă și să demonstrăm că $c = 0$ și $a \geqslant d$.

a) Demonstrăm că $c = 0$. Presupunem prin absurd că $c \neq 0$. Atunci pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$\frac{an+b}{cn+d} = \frac{a+bn^{-1}}{c+dn^{-1}} \leqslant \frac{a+b}{c}, \text{ deci } f(n) = \left[\frac{an+b}{cn+d}\right] \leqslant \left[\frac{a+b}{c}\right], \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

ceea ce arată că $\operatorname{Im} f \subset \left\{0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{a+b}{c}\right]\right\}$. Prin urmare $\operatorname{Im} f$ este o mulțime finită, ceea ce este o contradicție (căci funcția f fiind injectivă și avînd drept domeniu de definiție o mulțime infinită, atunci și $\operatorname{Im} f$ este o mulțime infinită). Deci $c = 0$.

b) Demonstrăm că $a \geqslant d$. În primul rînd, datorită faptului că $c = 0$, avem

$$f(n) = \left[\frac{an+b}{d}\right] = [and^{-1} + bd^{-1}], \ (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcția $g : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, $g(n) = and^{-1} + bd^{-1}$ este strict crescătoare (fiind restricția la $\mathbf{N}^*$ a funcției de gradul întîi $\bar{g} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\bar{g}(x) = ad^{-1}x + bd^{-1}$ în care $ad^{-1} > 0$) și cum funcția *parte întreagă* este de asemenea crescătoare, deducem că funcția f este crescătoare. Deoarece f este injectivă, deducem că ea este strict crescătoare.

Avem $f(1) \geqslant 0$; atunci $f(2) > f(1)$ și cum $f(2) \in \mathbf{N}^*$ deducem $f(2) \geqslant 1$; în fel, $f(3) > f(2)$, deci $f(3) \geqslant 2$, ș.a.m.d. Prin urmare $f(n) > n - 1$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, adică, $[and^{-1} + bd^{-1}] \geqslant n - 1$ și atunci, cu atît mai mult, vom avea $and^{-1} + bd^{-1} \geqslant n - 1$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$. Ultima inegalitate se mai poate scrie sub forma echivalentă:

$$(1 - ad^{-1})\, n \leqslant 1 + bd^{-1},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*, \tag{1}$$

Dacă am avea $a < d$, atunci $1 - ad^{-1} > 0$ și alegînd $n > \dfrac{1 + bd^{-1}}{1 - ad^{-1}}$, inegalitatea (1) nu ar mai fi satisfăcută. Deci $a \geqslant d$.

4. Vom demonstra că dreptele MQ, NR, PS trec prin ortocentrul H al triunghiului ABC. Deoarece triunghiul este ascuțitunghic, punctul H este în interiorul triunghiului. Se știe că simetricele ortocentrului față de laturile triunghiului sînt puncte situate pe cercul circumscris, deci în cazul problemei noastre punctele A', B', C' vor fi simetricele lui H respectiv față de BC, CA, AB. Atunci triunghiul HPB' este isoscel și deci $\widehat{B'HP} \equiv \widehat{HB'P}$, (1).

Dar $\widehat{HB'P} \equiv \widehat{BAA'}$ (unghiuri înscrise care subîntind arcul mic $\overset{\frown}{A'B}$), apoi $\widehat{BAA'} \equiv \widehat{C'CB}$ (unghiuri ascuțite, avînd laturile respectiv perpendiculare) și în sfîrșit $\widehat{C'CB} \equiv \widehat{C'B'B}$ (unghiuri înscrise care subîntind arcul mic $\overset{\frown}{BC'}$). Prin urmare $\widehat{HB'P} \equiv \widehat{C'B'B}$, (2).

Din (1) și (2) avem: $\widehat{B'HP} \equiv \widehat{C'B'B}$, (3).

Să observăm că $\widehat{SBH} \equiv \widehat{ACC'}$ (unghiuri înscrise care subîntind arcul mic $\overset{\frown}{AC'}$), deci în definitiv avem $\widehat{SBH} \equiv \widehat{HA'S}$, ceea ce înseamnă că patrulaterul $BA'HS$ este inscriptibil.

Rezultă atunci $\widehat{SHB} \equiv \widehat{SA'B}$, (4). Dar $\widehat{SA'B} \equiv \widehat{C'B'B}$, (5), (unghiuri înscrise care subîntind arcul mic $\overset{\frown}{BC'}$). Din (4) și (5) avem $\widehat{SHB} \equiv \widehat{C'B'B}$, (6). În sfîrșit, din (3) și (6) avem $\widehat{B'HP} \equiv \widehat{SHB}$ și deoarece punctele B', H, B sînt coliniare, deducem că și S, H, P sînt coliniare, adică dreapta SP trece prin H. În mod asemănător se arată că dreptele NR și MQ trec prin H și cu aceasta soluția se încheie.

Clasa a X-a

1. Arătăm mai întîi că pentru a, b, c, d numere pozitive avem inegalitatea

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqslant abc + abd + acd + bcd, \tag{1}$$

cu egalitate dacă și numai dacă $a = b = c = d$. În acest scop stabilim mai întîi următoarele două inegalități:

$$3(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geqslant a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + a^2d + ad^2 + b^2c + bc^2 + b^2d + bd^2 + c^2d + cd^2 \tag{2}$$

$$a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + a^2d + ad^2 + b^2c + bc^2 + b^2d + bd^2 + c^2d + cd^2 \geqslant 3(abc + abd + acd + bcd), \tag{3}$$

de unde prin comparare deducem (1).

Inegalitatea (2) este echivalentă cu

$(a^2 - b^2)(a - b) + (a^2 - c^2)(a - c) + (a^2 - d^2)(a - d) + (b^2 - c^2)(b - c) + (b^2 - d^2)(b - d) + (c^2 - d^2)(c - d) \geqslant 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a + b) + (a^2 - c^2)(a + c) + (a^2 - d^2)(a + d) + (b^2 - c^2)(b + c) + (b^2 - d^2)(b + d) + (c^2 - d^2)(c + d) \geqslant 0$, care este evidentă dacă a, b, c, d sînt pozitive. Totodată este clar că în (2) avem egalitate dacă și numai dacă $a = b = c = d$.

Scanned with OKEN Scanner

Inegalitatea (3) este echivalentă cu

$$\frac{1}{2}((a+b)(c-d)^2+(a+c)(b-d)^2+(a+d)(b-c)^2+(b+c)(a-d)^2+(b+d)(a-c)^2+$$

$+(c+d)(a-b)^2) \geqslant 0$ ceea ce este evident.

Observăm că egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=d$. În acest fel (1) este stabilită, cu observația că egalitatea se atinge dacă și numai dacă $a=b=c=d$.

Punînd acum în (1), $a=2^x$, $b=3^x$, $c=4^x$, $d=5^x$, obținem $8^x+27^x+64^x+125^x \geqslant 24^x+30^x+40^x+60^x$ cu egalitate dacă și numai dacă $2^x=3^x=4^x=5^x$ adică dacă și numai dacă $x=0$. În concluzie, unica soluție a ecuației considerate este $x=0$.

2. Considerăm triunghiul ABC și notăm cu Q, R, S proiecțiile punctului P pe dreptele BC, CA, AB. De asemenea, să considerăm: $u_1=\mu(\widehat{BPQ})$, $u_2=\mu(\widehat{QPC})$, $u_3=\mu(\widehat{CPR})$, $u_4=\mu(\widehat{RPA})$, $u_5=\mu(\widehat{APS})$, $u_6=\mu(\widehat{SPB})$. Considerăm două cazuri:

i) $Q\in[BC]$, $R\in[CA]$, $S\in[AB]$, adică proiecțiile Q, R, S sînt chiar pe laturile triunghiului. Din triunghiurile dreptunghice formate rezultă egalitățile:

$$p=y\cos u_1=z\cos u_2;\ q=z\cos u_3=x\cos u_4;\ r=x\cos u_5=y\cos u_6.$$

Inegalitatea din enunț se scrie prin echivalențe succesive:

$$xyz \geqslant (q+r)(r+p)(p+q) \Leftrightarrow xyz \geqslant (x\cos u_4+x\cos u_5)(y\cos u_6+y\cos u_1)\cdot$$

$$\cdot(z\cos u_2+z\cos u_3) \Leftrightarrow 1 \geqslant (\cos u_2+\cos u_3)(\cos u_4+\cos u_5)\cdot(\cos u_6+\cos u_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\cos\frac{1}{2}(u_2-u_3)\cos\frac{1}{2}(u_4-u_5)\cos\frac{1}{2}(u_6-u_1)\cos\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{1}{2}(u_2+u_3)\cos\frac{1}{2}(u_4+u_5)\cos\frac{1}{2}(u_6+u_1) \leqslant 1, \qquad (1)$$

Deoarece $\left|\cos\frac{1}{2}(u_2-u_3)\cos\frac{1}{2}(u_4-u_5)\cos\frac{1}{2}(u_6-u_1)\right| \leqslant 1$, pentru a stabili inegalitatea (1), este suficient să demonstrăm inegalitatea mai tare:

$$8\cos\frac{1}{2}(u_2+u_3)\cos\frac{1}{2}(u_4+u_5)\cos\frac{1}{2}(u_6+u_1) \leqslant 1, \qquad (2)$$

Din patrulaterele inscriptibile formate avem $u_2+u_3=\pi-C$, $u_4+u_5=\pi-A$, $u_6+u_1=\pi-B$ și astfel inegalitatea (2) este echivalentă cu

$$8\sin\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B\cdot\sin\frac{1}{2}C \leqslant 1, \qquad (3)$$

care este una din inegalitățile cunoscute în triunghi.

Să mai remarcăm faptul că în (1) avem egalitate dacă și numai dacă $\cos\frac{1}{2}(u_2-u_3)\cdot\cos\frac{1}{2}(u_4-u_5)=\cos(u_6-u_1)=1$ și avem egalitate și în (3), adică dacă și numai dacă $u_1=u_2=u_3$ și $A=B=C$. Prin urmare egalitate avem atunci și numai atunci cînd triunghiul ABC este echilateral, iar P este centrul său.

ii) $Q\in BC-[BC]$ sau $R\in CA-[CA]$ sau $S\in AB-[AB]$, adică cel puțin una dintre proiecțiile Q, R, S nu aparțin laturii corespunzătoare. Dacă de exemplu avem $Q\notin[BC]$ și pe dreapta BC avem ordonarea $Q-B-C$, din teorema unghiului exterior rezultă $\hat{B}>\frac{1}{2}\pi$, adică unghiul $\hat{B}$ al triunghiului ABC este obtuz. Deoarece triunghiul ABC nu poate avea mai mult de un unghi obtuz, deducem că celelalte două proiecții sînt pe laturi, adică $R\in(AC)$,

Scanned with OKEN Scanner

$S \in (AB)$. În acest caz se mențin egalitățile $u_2 + u_3 = \pi - C$, $u_4 + u_5 = \pi - A$, dar $u_6 + u_1 \neq \pi - B$. În schimb avem $u_6 - u_1 = \pi - B$ și atunci (1) devine:

$$8 \cos \frac{1}{2}(u_2 - u_3) \cdot \cos \frac{1}{2}(u_4 - u_5) \cdot \sin \frac{1}{2} B \cdot \sin \frac{1}{2} C \cdot \sin \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2}(u_6 + u_1) \leqslant 1, \quad (4)$$

Deoarece $\left| \cos \frac{1}{2}(u_2 - u_3) \cos \frac{1}{2}(u_4 - u_5) \cos \frac{1}{2}(u_6 + u_1) \right| \leqslant 1$, pentru a stabili (4) este suficient să demonstrăm inegalitatea $8 \sin \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} B \cdot \sin \frac{1}{2} C \leqslant 1$ care este exact inegalitatea (3) din cazul precedent și care este valabilă în orice fel de triunghi. Cu aceasta soluția se încheie.

3. Deși se poate da o soluție efectiv algebrică, vom prefera una de factură geometrică.

a) Arătăm mai întîi că discul unitate $D_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ este inclus în mulțimea A. Este clar că $-1 \in A$ și $1 \in A$, deci $0 = -1 + 1 \in A$. Deoarece cercul unitate este inclus în A prin ipoteză, mai rămîne să dovedim că interiorul acestui cerc aparține lui A. Fie deci $z \in \mathbf{C}$, cu $0 < |z| < 1$. Notăm cu M imaginea geometrică a lui z și fie N mijlocul segmentului $[OM]$, unde O este originea planului complex. Perpendiculara în N pe OM intersectează cercul unitate în punctele $N_1(z_1)$ și $N_2(z_2)$. Rezultă $z_1, z_2 \in A$. Patrulaterul ON_1MN_2 fiind un romb, vom avea $z = z_1 + z_2 \in A$.

b) Demonstrăm prin inducție că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, discul cu centrul în origine și rază 2^n adică $D_{2^n} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqslant 2^n\}$ este inclus în A. Pentru $n = 0$, am demonstrat deja la punctul a). Să presupunem că $D_{2^n} \subset A$ și să demonstrăm că $D_{2^{n+1}} \subset A$. Într-adevăr, pentru orice $z \in D_{2^{n+1}}$ avem $\frac{1}{2} z \in D_{2^n}$, deci $-\frac{1}{2} z \in A$ și prin urmare $z = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{2} z \in A$. Deoarece $\mathbf{C} = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_{2^n}$, rezultă $\mathbf{C} \subset A$, adică $\mathbf{C} = A$.

4. Ecuația se scrie succesiv:

$$4a^2 \sin(x + B) \sin(x + C) = a^2 + 4bc \Leftrightarrow 4 \sin(x + B) \sin(x + C) = 1 + 4 \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin(x + B) \sin(x + C) = 1 + 4 \sin B \sin C \Leftrightarrow 2 \cos(B - C) - 2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi + 2x\right) =$$

$$= 1 + 2 \cos(B - C) - 2 \cos \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{2}\pi + 2x\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}. \text{ Rezultă } 2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ cu } k \in \mathbf{Z}, \text{ adică } x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2},$$

$k \in \mathbf{Z}$.

Clasa a XI-a

1. Evident polinomul nul $P = 0$ verifică enunțul. Fie deci P un polinom nenul de gradul $n \in \mathbf{N}$ cu proprietatea din enunț. Vom arăta prin inducție după n că $P = X^n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$. Dacă $n = 0$, avem $P = a \in \mathbf{R}^*$ și egalitatea din ipoteză devine $a = a^2$, de unde $a = 1$. Prin urmare $P = 1 = X^0$. Să presupunem acum că singurul polinom de gradul n care verifică enunțul este X^n și să demonstrăm că singurul polinom de gradul $n + 1$ cu proprietatea menționată este X^{n+1}. Fie deci P un polinom de gradul $n + 1$ așa încît

$$P(\sin x) = P(\operatorname{tg} x) \, P(\cos x), (\forall) x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci avem:

$$P(\cos x) = \frac{P(\sin x)}{P(\operatorname{tg} x)},\ (\forall) x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) - A, \tag{2}$$

unde am notat cu A mulțimea finită a acelor valori $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\operatorname{tg} x$ este rădăcină reală a polinomului P.

În egalitatea (2) trecem la limită cînd $x \nearrow \frac{\pi}{2}$ și deoarece $\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} P(\operatorname{tg} x) = \lim\limits_{y \to \infty} P(y) = \pm\infty$, obținem $P(0) = \frac{P(1)}{\pm\infty}$, adică $P(0) = 0$. Prin urmare $P = XQ$, unde Q este un polinom de gradul n. Egalitatea (1) devine $\sin x\, Q(\sin x) = \operatorname{tg} x\, Q(\operatorname{tg} x) \cos x\, Q(\cos x)$, $(\forall) x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, adică $Q(\sin x) = Q(\operatorname{tg} x) Q(\cos x)$, $(\forall) x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$. În baza ipotezei inducției vom avea $Q = X^n$ și atunci $P = XQ = X^{n+1}$, ceea ce încheie soluția problemei.

2. Avem $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n} > x_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$, deci șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este strict crescător. Arătăm că șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este nemărginit; într-adevăr, dacă acest șir ar fi mărginit, ar fi convergent către un număr $x \in \mathbf{R}$ ceea ce este imposibil. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este strict crescător și nemărginit, avem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$. Să considerăm acum șirul $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ definit prin $y_n = e^{x_n}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$. Rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \infty$. Avem: $y_{n+1} = e^{x_{n+1}} = e^{x_n + e^{-x_n}} = e^{x_n} \cdot e^{e^{-x_n}} = y_n e^{\frac{1}{y_n}}$, deci $y_{n+1} - y_n = y_n\left(e^{\frac{1}{y_n}} - 1\right) = \frac{e^{\frac{1}{y_n}} - 1}{\frac{1}{y_n}}$. Datorită faptului că $\lim\limits_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, luînd

șirul $\frac{1}{y_n} \to 0$, deducem că $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{y_n}} - 1}{\frac{1}{y_n}} = 1$, adică $\lim\limits_{n \to \infty} (y_{n+1} - y_n) = 1$. Să considerăm

șirul $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ definit prin $t_n = n$. Avem:

$\frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n} = y_{n+1} - y_n \to 1$, deci conform teoremei *Cesaro-Stolz* rezultă $\frac{y_n}{t_n} \to 1$, adică

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{e^{x_n}}{n} = 1$. Luînd șirul $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $s_n = \ln n$, putem scrie $\frac{x_{n+1} - x_n}{s_{n+1} - s_n} = \frac{e^{-x_n}}{\ln \frac{n+1}{n}} = \frac{1}{e^{x_n} \cdot \ln(1 + n^{-1})} =$

$= \frac{1}{\frac{e^{x_n}}{n} \cdot \ln(1 + n^{-1})^n} \to 1$. Folosind din nou teorema *Cesaro-Stolz*, rezultă $\frac{x_n}{s_n} \to 1$, adică

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{\ln n} = 1$.

3. ($\Rightarrow$) Să presupunem că rang $(A) \leqslant 1$. Dacă rang $(A) = 0$, avem $a_{ij} = 0$, $(\forall)\ (i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, deci putem lua $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$. Să vedem ce se întîmplă în cazul cînd rang $(A) = 1$. În acest caz există un element nenul a_{kp}, unde $(k, p) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots n\}$ este fixată, iar toți minorii de ordinul doi ai matricei date sînt nuli. Deoarece $a_{kp} \in \mathbf{R}^*$, putem fixa $x_k \in \mathbf{R}^*, y_p \in \mathbf{R}^*$ așa încît $a_{kp} = x_k y_p$. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ vom nota $x_i = a_{ip} y_p^{-1}$ și pentru fiecare $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vom nota $y_j =$

Scanned with OKEN Scanner

$= a_{kj}x_k^{-1}$. Rezultă $a_{ip} = x_i y_p$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ respectiv $a_{kj} = x_k y_j$, $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$. Fie acum $i \in \{1, 2, \ldots, m\} - \{k\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{p\}$. Scriind că minorul de ordinul doi obținut prin intersecția liniilor k și i cu coloanele p și j este nul, rezultă $a_{kp}a_{ij} = a_{ip}a_{kj}$. Această egalitate se scrie echivalent $x_k y_p a_{ij} = x_i y_p x_k y_j$ și împărțind prin $x_k y_p \in \mathbb{R}^*$, obținem $a_{ij} = x_i y_j$. Prin urmare am demonstrat că $a_{ij} = x_i y_j$, $(\forall)\ (i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$.

($\Leftarrow$) Dacă există $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$ așa încît $a_{ij} = x_i y_j$, $(\forall)\ (i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, se constată ușor că toți minorii de ordinul doi ai matricei date sînt nuli, deci rang $(A) \leqslant 1$.

4. ($\Rightarrow$). Presupunem că $\det(A + B) \geqslant 0$ și vom demonstra că $\det(A^n + B^n) \geqslant 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm două cazuri, după cum $n \in 2\mathbb{N}$ sau $n \in 2\mathbb{N} + 1$.

a) $n \in 2\mathbb{N}$. Fie deci $n = 2p$. Avem: $A^{2p} + B^{2p} = (A^p)^2 + (B^p)^2 = (A^p + iB^p) \cdot (A^p - iB^p) = (A^p + iB^p)\overline{(A^p + iB^p)}$ așa că dacă trecem la determinanți, rezultă:

$$\det(A^{2p} + B^{2p}) = \det(A^p + iB^p) \cdot \overline{\det(A^p + iB^p)} = |\det(A^p + iB^p)|^2 \geqslant 0.$$

b) $n \in 2\mathbb{N} + 1$. Fie $n = 2p + 1$. Să notăm cu $x_0 = -1, x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ rădăcinile complexe ale ecuației binome $x^{2p+1} + 1 = 0$, (1).

Ținînd seama de faptul că matricele A și B comută, precum și de relațiile lui *Viète* pentru ecuația (1), putem scrie:

$$\prod_{j=0}^{2p}(A - x_j B) = A^{2p+1} - \left(\sum_{j=0}^{2p} x_j\right) A^{2p}B + \left(\sum_{0 \leqslant j < k \leqslant 2p} x_j x_k\right) A^{2p-1} \cdot B^2 - \ldots + B^{2p+1} =$$
$$= A^{2p+1} + B^{2p+1}.$$

Deoarece $x_0 = -1$, iar rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ sînt două cîte două conjugate, putem scrie identitatea obținută sub forma:

$$A^{2p+1} + B^{2p+1} = (A + B)\prod_{j=1}^{p}((A - x_j B)(A - \bar{x}_j B)), \qquad (2).$$

Deoarece A și B au elemente reale, avem pentru fiecare $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\det((A - x_j B)(A - \bar{x}_j B)) = \det(A - x_j B)\det(A - \bar{x}_j B) = \det(A - x_j B)\overline{\det(A - x_j B)} = \det(A - x_j B) \cdot \det(A - x_j B) = |\det(A - x_j B)|^2 \geqslant 0$, unde trebuie să menționăm că am notat $\bar{X} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ matricea obținută din $X \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, înlocuind elementele acesteia cu conjugatele lor. Deoarece și $\det(A + B) \geqslant 0$, trecînd în (2) la determinanți, rezultă $\det(A^{2p+1} + B^{2p+1}) = \det(A + B)\prod_{j=1}^{p}\det((A - x_j B)(A - \bar{x}_j B)) \geqslant 0$.

Clasa a XII-a

1. Vom da o soluție care se bazează pe criteriul de integrabilitate al lui *Lebesgue*, pentru care se pot consulta: *Miron Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus* „Analiză Matematică" vol. 1, E.D.P., București, 1971.

În acest scop reamintim mai întîi următoarea definiție: o mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numește de măsură *Lebesgue* nulă (*mulțime neglijabilă*) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un șir de intervale deschise $(I_n)_{n \geqslant 1}$ așa încît $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon$, unde $l(I)$ este lungimea intervalului I.

Reamintim de asemenea că o submulțime a unei mulțimi neglijabile este neglijabilă, iar o reuniune numărabilă de mulțimi neglijabile este tot o mulțime neglijabilă. (v. op. cit.).

În sfîrșit reamintim criteriul de integrabilitate al lui *Lebesgue*: O funcție $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă *Riemann* dacă și numai dacă este mărginită și mulțimea $D(f)$ a punctelor sale de discontinuitate este de măsură *Lebesgue* nulă.

Să trecem acum la soluția propriu-zisă a problemei noastre. Deoarece f este integrabilă, rezultă că f este mărginită și atunci și g este o funcție mărginită. Rămîne să arătăm că mulțimea $D(g)$ a discontinuităților funcției g este de măsură *Lebesgue* nulă.

Folosind definiția cu șiruri a continuității se poate dovedi ușor că x_0 este punct de continuitate pentru funcția f dacă și numai dacă $\sqrt{x_0}$ este punct de continuitate pentru funcția g. Negînd această echivalență, vom avea $x_0 \in D(f) \Leftrightarrow \sqrt{x_0} \in D(g)$, ceea ce înseamnă $D(g) = \sqrt{D(f)} \overset{\text{def}}{=} \{\sqrt{x} \mid x \in D(f)\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Putem presupune că $D(g)$ este mulțimea discontinuităților funcției g doar în intervalul $(0,1]$, căci adăugînd eventual punctul 0, măsura *Lebesgue* nu se modifică. Deci, putem scrie:

$$D(g) = D(g) \cap (0,1] = D(g) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}, 1\right]\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(D(g) \cap \left[\frac{1}{k}, 1\right]\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k(g), \text{ unde}$$

am notat cu $D_k(g)$ mulțimea discontinuităților funcției g pe intervalul $\left[\frac{1}{k}, 1\right]$.

Va fi suficient să demonstrăm că fiecare mulțime $D_k(g)$ este de măsură *Lebesgue* nulă, $(\forall) k \in \mathbf{N}^*$.

Într-adevăr, pentru $k \in \mathbf{N}^*$ fixat, mulțimea $D_k(f) \overset{\text{def}}{=} D(f) \cap \left[\frac{1}{k^2}, 1\right]$ care reprezintă discontinuitățile funcției f pe intervalul $\left[\frac{1}{k^2}, 1\right]$, este o mulțime neglijabilă (căci este submulțime a lui $D(f)$, care este neglijabilă). Înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un șir de intervale deschise $(I_n^k)_{n \geq 1}$, $I_n^k = (a_n^k, b_n^k) \subset \left[\frac{1}{k^2}, 1\right]$, așa încît $D_k(f) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^k$ și $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n^k) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^k - a_n^k) < \frac{\varepsilon}{2k}$, (1). Dacă notăm $J_n^k = (\sqrt{a_n^k}, \sqrt{b_n^k})$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, rezultă imediat $D_k(g) = \sqrt{D_k(f)} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^k$ și folosind (1) și faptul că $a_n^k, b_n^k \geq k^{-2}$, avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n^k) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{a_n^k} - \sqrt{b_n^k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^k - a_n^k}{\sqrt{b_n^k} - \sqrt{a_n^k}} \leq 2k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^k - a_n^k) < 2k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon,$$ ceea ce arată că mulțimea $D_k(g)$ este de măsură *Lebesgue* nulă. Cu aceasta, soluția se încheie.

2. Notînd cu I, J respectiv integralele din membrul stîng și din membrul drept, putem scrie:

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\left(\sin^2 x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos^2 x\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}(2\sin^2 x - 1 - \sin x \cos^2 x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\left(-\cos 2x - \frac{1}{2}\cos x \sin 2x\right) dx = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2e^{\sin x}\cos 2x + e^{\sin x}\cos x \sin 2x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x}(\sin 2x)' + (e^{\sin x})' \sin 2x)\, dx = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x}\sin 2x)'\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4} e^{\sin x}\sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \quad \text{de unde } I = J.$$

3.1). Fie $H = \{e, a, a^2, a^3\}$ subgrupul ciclic generat de elementul a și să notăm $bH = \{b, ba, ba^2, ba^3\}$. Mulțimile H și bH au cîte patru elemente și sînt disjuncte, deoarece dacă ar exista $x \in bH \cap H$, atunci $x = by$, cu $y \in H$ și de aici ar rezulta $b = xy^{-1} \in H$, contradicție cu ipoteza $b \in G - H$. Deoarece $H \subset G$, $bH \subset G$, rezultă $bH \cup H \subset G$ și deoarece fiecare din mulțimile $bH \cup H$ și G au cîte 8 elemente, incluziunea de mai sus este chiar o egalitate. Deci, $G = bH \cup H = \{e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$.

2) Nu putem avea $ab \in H$ deoarece din $ab = t \in H$ ar rezulta $b = a^{-1}t \in H$, contradicție. Prin urmare $ab \in bH = \{b, ba, ba^2, ba^3\}$. Dacă am avea $ab = b$ ar rezulta $a = e$, contra-

Scanned with OKEN Scanner

dicție. Dacă am avea $ab = ba$ avînd în vedere că toate elementele lui G se scriu sub forma $b^i a^j$, $(i \in \{0, 1\}, j \in \{0, 1, 2, 3\})$, ar rezulta că G este abelian, contradicție. Dacă am avea $ab = ba^2$, ar rezulta $a^2 b = a(ab) = a(ba^2) = (ab)a^2 = (ba^2)a^2 = ba^4 = b$, adică $a^2 = e$, contradicție cu faptul că a este element de ordinul patru în grupul G. Rămîne drept singură posibilitate $ab = ba^3$.

3) Nu putem avea $b^2 \in bH$, deoarece din $b^2 = bu$, cu $u \in H$, ar rezulta $b = u \in H$, contradicție. Prin urmare $b^2 \in H = \{e, a, a^2, a^3\}$. Dacă am avea $b^2 = a$ atunci ținînd seama că a are ordinul patru ar rezulta că 4 este cel mai mic număr natural cu proprietatea $(b^2)^4 = e$, adică 8 este cel mai mic număr natural așa încît $b^8 = e$, deci b ar fi un element de ordinul 8 în grupul G; atunci grupul G ar fi ciclic (generat de b) și deci abelian, contradicție. Dacă am avea $b^2 = a^3$, constatînd ușor că și a^3 are tot ordinul 4 în grupul G, conform raționamentului anterior am ajunge la concluzia că b este element de ordinul 8 în grupul G ceea ce ar însemna că G este ciclic, deci abelian, contradicție. Prin urmare neapărat $b^2 \in \{e, a^2\}$. Un exemplu de grup necomutativ cu 8 elemente îl constituie grupul multiplicativ al cuaternionilor de normă 1, adică $C_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, unde operația este definită astfel: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Dacă în acest grup, luăm $a = i$, $b = j$, obținem $b^2 = a^2$ (v. punctul 3) al problemei noastre).

4.a)$\Rightarrow$ b). Numărul elementelor inversabile din inelul Z_n este $\varphi(n)$ unde φ este indicatorul lui *Euler*. Prin urmare ipoteza este echivalentă cu $\varphi(n) = \frac{1}{2} n$, adică $n = 2\varphi(n)$, (1).

Fie $n = p_1^{u_1} \dots p_k^{u_k}$ descompunerea în factori primi a numărului natural n, unde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ sînt numere prime, iar $u_1, u_2, \dots, u_k$, sînt numere naturale nenule. Se știe atunci că: $\varphi(n) = p_1^{u_1 - 1} \dots p_k^{u_k - 1}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1)$ și deci egalitatea (1) devine:

$$p_1 p_2 \dots p_k = 2(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1), \quad (2).$$

Din (2) avem că 2 divide produsul $p_1 p_2 \dots p_k$, deci în mod necesar vom avea $p_1 = 2$. Dacă presupunem $k > 1$, egalitatea (2) devine:

$$p_2 p_3 \dots p_k = (p_2 - 1) \dots (p_k - 1), \quad (3).$$

Dar (3) este imposibilă, deoarece membrul stîng este evident mai mare decît cel drept. Prin urmare $k = 1$ și $p_1 = 2$, ceea ce înseamnă că $n = 2^{u_1}$.

b)$\Rightarrow$a). Dacă $n = 2^k$, atunci elementele inversabile din inelul Z_{2^k} sînt clasele $\hat{a}$ cu proprietatea $(a, 2^k) = 1$, adică clasele impare, iar clasele neinversabile sînt cele pare. Prin urmare există 2^{k-1} elemente inversabile și tot 2^{k-1} elemente neinversabile.

CHESTIUNI DE EXAMEN

SUBIECTE DATE LA LUCRAREA SCRISĂ DE MATEMATICĂ LA ADMITEREA ÎN LICEE

Treapta I, iulie 1986

I. Rezolvați:

a) ecuația: $4x + 6x = 15$;

b) inecuația: $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{2} < 5$;

c) ecuația: $4x^2 + x - 5 = 0$.

II. a) Simplificați expresia:

$$E(a) = \frac{(a+5)^2 - (a-5)^2}{(2a+5)^2 + (2a-5)^2}$$

arătați că $E(a) \leq \frac{1}{2}$, $a \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Calculați cîtul și restul împărțirii polinomului $X^4 + X^3 + X + 1$ la polinomul $X - 1$.

c) Fie a, b, c, p numere reale, astfel încît $a + b + c = 6p$. Arătați că $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12p^2$.

III. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară, cu $VA \equiv VB \equiv VC \equiv AB \equiv BC = a$ și $\widehat{AEC} \equiv \widehat{AVC} = 90°$. Fie D mijlocul lui AC.

a) Arătați că $AC \perp (VBD)$.

b) Calculați suprafața totală și volumul piramidei.

c) Arătați că există un punct I egal depărtat de cele 4 vîrfuri ale piramidei și aflați distanța de la I la unul din colțurile piramidei.

Treapta a II-a, iulie 1986

I. 1) Să se rezolve: $x^3 + x^2 - 2x = 0$.

2) Să se rezolve: $4^x + 2^{x+1} \leq 288$.

3) Dacă $x \geq 0$, $y \geq 0$ și $x - y = x^3 + y^3$ arătați că:

$$(x^2 + y^2 - 1)(x - y) < 0 \text{ și } x^2 + y^2 < 1.$$

II. 1) Să se rezolve: $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0$.

2) Dacă $a = 6$, $b + c = 9$, $\hat{A} = 60°$, calculați S_{ABC}.

3) Să se găsească $z \in \mathbb{C}$, astfel încît:

$$|z| = 1 \text{ și } |z^3 + (\bar{z})^3| = 2.$$

III. 1) Se dă un pătrat cu latura a. Fie $E \in CD$ și AF bisectoarea unghiului $\widehat{BAE}$. Dacă $\widehat{BAF} = \alpha$ să se calculeze: AE, AF, $\dfrac{DE + BF}{AE}$.

2) Se dă un paralelipiped care are fețele romburi cu latura a și un unghi de 60°. Să se calculeze lungimea diagonalei mai lungi a paralelipipedului.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E: 8771* (G.M. 2/1986, pag. 55)

Să se determine numerele naturale n și $\overline{ab}$ știind că $\overline{ab} \cdot n = \overline{a0b}$.

Liviu Pîrșan

Soluție. Pentru ca numerele $\overline{ab}$ și $\overline{a0b}$ să existe, trebuie ca $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ și $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Atunci $\overline{ab} \neq 0$, iar relația dată se mai scrie sub forma $n = \dfrac{\overline{a0b}}{\overline{ab}}$. Observăm că $n \neq 0$. Nu putem avea nici $n = 1$, deoarece ar rezulta $\overline{a0b} = \overline{ab}$, imposibil pentru $a \neq 0$. Deci $n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq 2$. Deoarece $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, avem $9b \geq 0$ de unde rezultă succesiv: $10 \cdot b > b$, $100a + b \leq 100a + 10b$, $100a + b \leq 10(10a + b)$, deci $\overline{a0b} \leq 10 \cdot \overline{ab}$ și $n = \dfrac{\overline{a0b}}{\overline{ab}} \leq 10$. Rezultă $n \in \{2, 3, \ldots, 10\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $b = 0$ atunci avem $n = \frac{\overline{a00}}{a0} = \frac{100a}{10a} = 10$, oricare ar fi cifra a nenulă.

Avem deci, ca soluții de forma $(n, \overline{ab})$ ale problemei:

$$(10, 10); (10, 20); (10, 30): \ldots; (10, 90).$$

Căutăm soluții și pentru $a, b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ și $n \in \{2, 3, \ldots, 9\}$. Scriem $n = \frac{\overline{a0b}}{\overline{ab}} = \frac{100a + b}{10a + b} = 1 + \frac{90a}{10a + b} = 1 + \frac{90}{10 + \frac{b}{a}}$, de unde $\frac{90}{10 + \frac{b}{a}} = n - 1 \in \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$. Dar $1 \leqslant \frac{90}{10 + \frac{b}{a}} \leqslant 8 \Rightarrow 1 \geqslant \frac{10 + \frac{b}{a}}{90} \geqslant$

$$\geqslant \frac{1}{8} \Rightarrow 90 \geqslant 10 + \frac{b}{a} \geqslant \frac{90}{8} \Rightarrow \frac{10}{8} \leqslant \frac{b}{a} \leqslant 80 \Rightarrow 1 < \frac{5}{4} \leqslant \frac{b}{a} \Rightarrow b > a.$$

Deci $a \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, $b \in \{2, 3, \ldots, 9\}$ și atunci $\frac{5}{4} \leqslant \frac{b}{a} \leqslant 9$.

Pentru $\frac{b}{a} = \frac{5}{4}$ cu a și b cifre, avem $a = 4 < b = 5$ iar $n = \frac{405}{45} = 9$ și deci obținem soluția (9,45).

Deoarece $n = 1 + \frac{90}{10 + \frac{b}{a}} \in \mathbf{N}$ impune ca $10 + \frac{b}{a}$ să fie divizor al lui 90 din intervalul $\left[10 + \frac{5}{4}, 19\right]$, deci $10 + \frac{b}{a} = 15$ sau $10 + \frac{b}{a} = 18$. Pentru $10 + \frac{b}{a} = 15 \Rightarrow \frac{b}{a} = 5 \Rightarrow b = 5a \Rightarrow a = 1$, $b = 5$ și $n = \frac{105}{15} = 7$, deci soluția (7, 15).

Pentru $10 + \frac{b}{a} = 18 \Rightarrow \frac{b}{a} = 8 \Rightarrow b = 8a \Rightarrow a = 1$, $b = 8$ și $n = \frac{108}{18} = 6$, deci avem și soluția (6, 18).

În concluzie, problema are 12 soluții de forma $(n, \overline{ab})$: (6,18); (7,15); (9, 45); (10,10); (10,20); (10,30); ...; (10,90).

Soluție bună au dat: *Dumitru Ancuța-Eugenia*, cl. a V-a, S.g. 1 Drăgănești-Olt; *Amarici Andreea*, cl. a V-a, Lic. ped. Ploiești; *Koronca Teodora*, cl. a V-a, S.g. 8 Baia Mare și *Cașoni Simona*, cl. a V-a, S.g. 19 Baia Mare.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VI-a

Problema E : 8780* (G.M. 2/1986, pag. 56)

Să se arate, în fiecare caz, că triunghiul pentru care între lungimile laturilor a, b, c, există relațiile :

1) $$\frac{(m+1)a+b+c}{a}=\frac{a+(m+1)b+c}{b}=\frac{a+b+(m+1)c}{c}$$

2) $$\frac{(m+1)a+b+c}{a+(m+1)b+c}=\frac{a+(m+1)b+c}{a+b+(m+1)c}=\frac{a+b+(m+1)c}{(m+1)a+b+c},$$

unde $m\in\mathbf{N}^*$, este echilateral.

Radu Ghenghiu, profesor, Oradea

Soluție. 1) Formăm un sistem egalînd, pe rînd, primul raport cu celelalte două, aducem la același numitor, eliminăm numitorul deoarece $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ ca laturi ale triunghiului și obținem :

$$\begin{cases}(m+1)ab+b^2+bc=a^2+(m+1)ab+ac\\(m+1)ac+bc+c^2=a^2+ab+(m+1)ac\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2+bc=a^2+ac\\bc+c^2=a^2+ab\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-a^2+bc-ac=0\\c^2-a^2+bc-ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b-a)(b+a+c)=0\\(c-a)(c+a+b)=0.\end{cases}$$

Deoarece $a+b+c\neq 0$ rezultă $b-a=0$ și $c-a=0$ de unde obținem $a=b=c$, adică triunghiul este echilateral.

2) Fie k valoarea comună a rapoartelor din enunț. Avînd un șir de rapoarte egale se știe că valoarea lor comună este egală cu raportul format din suma numărătorilor și suma numitorilor, deci :

$$k=\frac{(m+1)a+b+c+a+(m+1)b+c+a+b+(m+1)c}{a+(m+1)b+c+a+b+(m+1)c+(m+1)a+b+c}=$$

$$=\frac{(m+3)(a+b+c)}{(m+3)(a+b+c)}=1.$$

Obținem :

$$\frac{(m+1)a+b+c}{a+(m+1)b+c}=1\Leftrightarrow(m+1)a+b+c=a+(m+1)b+c\Leftrightarrow ma=mb,\ (1).$$

Deoarece $m\in\mathbf{N}^*$, deci $m\neq 0$, din (1) rezultă $a=b$.

Analog din $\dfrac{a+(m+1)b+c}{a+b+(m+1)c}=1$ rezultă $b=c$. Deci $a=b=c$, prin urmare triunghiul este echilateral.

Soluție dată de *Tudorică Adrian*, cl. a VI-a, Șc. gen. 70 București ; *Filipeanu Mihaela*, cl. a VI-a, Șc. gen. 5 Vaslui ; *Zgăiu Dana*, cl. a VI-a, Șc. gen. 26 Ploiești.

Problema E : 8781* (G.M. 2/1986, pag. 56)

Să se determine numerele naturale p și q astfel încît :

$$5^{p+1}+3=2(5^q-5^p).$$

Ovidiu Pop, profesor, Satu Mare

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Relația din enunț se poate scrie succesiv:

$$5^{p+1} + 3 = 2(5^q - 5^p) \Leftrightarrow 5^p \cdot 5 + 3 = 2 \cdot 5^q - 2 \cdot 5^p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^p \cdot 5 + 2 \cdot 5^p + 3 = 2 \cdot 5^q \Leftrightarrow 5^p \cdot 7 + 3 = 2 \cdot 5^q, \quad (1).$$

Dacă $p \geqslant 1$ și $q \geqslant 1$ atunci numerele 5^p și 5^q au ultima cifră 5; numărul $5^p \cdot 7$ are ultima cifră 5 și deci membrul stîng din (1) va avea ultima cifră 8. Numărul $2 \cdot 5^q$ va avea ultima cifră 0, deci egalitatea (1) este imposibilă.

Dacă $p = 0$, din (1) obținem $1 \cdot 7 + 3 = 2 \cdot 5^p$ adică $2 \cdot 5^q = 10$ de unde $5^q = 5$ adică $q = 1$. Deci o soluție a problemei este $p = 0$ și $q = 1$.

Dacă $q = 0$, din (1) obținem $5^p \cdot 7 + 3 = 2 \Leftrightarrow 5^p \cdot 7 = 2 - 3 \Leftrightarrow 5^p \cdot 7 = -1$, imposibil, deoarece membrul stîng este strict pozitiv. Deci singura soluție a problemei este $p = 0$ și $q = 1$.

Soluție dată de *Drăguș Andy* și *Pricop Andreea*, cl. a VI-a, Șc. gen. 190 București; *Furea Laura*, cl. a VI-a, Șc. gen. 23 Ploiești.

Clasa a VII-a

Problema E : 8785* (G.M. 2/1986, pag. 57)

Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$) astfel încît $BC > AB\sqrt{2}$ și $M \in (BC)$. Să se arate că:

$$\widehat{MAC} = 90^\circ \Leftrightarrow 2AM^2 = CM^2 - CM \cdot BM.$$

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

Soluție. Din condiția $BC > AB\sqrt{2}$ rezultă $BC^2 > 2AB^2$ adică $BC^2 > AB^2 + AC^2$, deci triunghiul ABC este obtuzunghic cu $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Prin urmare $\widehat{ACB} < 90^\circ$ și $\widehat{ABC} < 90^\circ$, (1).

($\Rightarrow$): $\widehat{MAC} = 90^\circ$. Din triunghiul dreptunghic MAC avem:

$$AM^2 = CM^2 - AC^2, \quad (2).$$

Aplicăm teorema lui *Pitagora* generalizată în triunghiul ABM, pentru latura AM care se opune unghiului ascuțit $\widehat{ABM}$ (din (1)):

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2BM \cdot BD, \quad (3)$$

unde BD este proiecția lui AB pe BM, adică $AD \perp BC$. Deoarece triunghiul ABC este isoscel rezultă $BD = DC = \frac{BC}{2}$. Înlocuind în (3) obținem:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - BM \cdot BC, \quad (4).$$

Adunînd relațiile (2) și (4) obținem:

$$2AM^2 = CM^2 - AC^2 + AB^2 + BM^2 - BM \cdot BC, \quad (5).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama că $AC \equiv AB$ relaţia (5) se poate scrie succesiv :

$$2AM^2 = CM^2 + BM(BM - BC) \Leftrightarrow 2AM^2 = CM^2 - BM\,(BC - BM) \Leftrightarrow 2AM^2 = CM^2 - BM \cdot MC,$$

ceea ce trebuie demonstrat.

($\Leftarrow$) : Relaţia din enunţ se poate scrie succesiv :

$$2AM^2 = CM^2 - CM \cdot BM \Leftrightarrow AM^2 + AM^2 = CM^2 - CM \cdot BM \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AM^2 + CM \cdot BM = CM^2 - AM^2, \qquad (6).$$

Membrul stîng al relaţiei (6) se poate scrie :

$$AM^2 + CM \cdot BM = AM^2 + (BC - BM) \cdot BM =$$
$$= AM^2 + BC \cdot BM - BM^2, \qquad (7).$$

Dar din relaţia (4) deducem :

$$AM^2 - BM^2 + BM \cdot BC = AB^2,$$

deci din (7) rezultă că

$$AM^2 + CM \cdot BM = AB^2.$$

Cum $AB \equiv AC$, înlocuind în (6) obţinem :

$$CM^2 - AM^2 = AC^2 \Leftrightarrow CM^2 = AM^2 + AC^2$$

şi conform reciprocei teoremei lui *Pitagora* rezultă că triunghiul AMC este dreptunghic cu $\widehat{MAC} = 90°$, ceea ce trebuia demonstrat.

Soluţie dată de *Simion Mihaela*, cl. a VII-a, Şc. gen. 22 Braşov *Burian Sergiu*, cl. a VII-a, Şc gen. Sărmaşu.

Problema E : 8786* (G.M. 2/1986, pag. 57)

Să se rezolve ecuaţia : $\left[\frac{3x+1}{2}\right] = x + 1.$

Gh. Boja, profesor, Suhaia, Teleorman

Soluţie. Deoarece $\left[\frac{3x+1}{2}\right] \in \mathbf{Z}$ rezultă că $x+1 \in \mathbf{Z}$ deci $x \in \mathbf{Z}$, (1).

Conform definiţiei părţii întregi avem :

$$0 \leqslant \frac{3x+1}{2} - (x+1) < 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{x-1}{2} < 1$$

ceea ce este echivalent cu sistemul de inecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} \geqslant 0 \\ \frac{x-1}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} \geqslant 0 \\ \frac{x-3}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1, 3).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de (1) obținem mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x \in [1, 3) \cap \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1, 2\}.$$

Soluție dată de *Alexandru Mihaela*, cl. a VII-a, Șc. gen. 30 București; *Popescu Bogdan*, cl. a VII-a, Șc. gen. 7 Botoșani.

Clasa a VIII-a

Problema E : 8794* (G.M. 2/1986, pag. 58)

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură $2a$, $BD' \cap (ACB') = \{M\}$, $AC' \cap (BDA') = \{N\}$, $CA' \cap (BDC') = \{P\}$, $DB' \cap (ACD') = \{Q\}$. Fie M', N', P', Q' proiecțiile lui M, N, P, respectiv Q pe planul $(ABCD)$. Să se calculeze volumul corpului $MNPQM'N'P'Q'$.

Ovidiu Pop, profesor, Satu Mare

Soluție. Arătăm că $BD' \perp (ABC')$. Avem $DD' \perp (ABCD) \Rightarrow DD' \perp AC$. Cum $BD \perp AC$ rezultă că $AC \perp (BDD') \Rightarrow AC \perp BD'$. Analog $AB' \perp BD'$. Rezultă $BD \perp (ACB')$.

În continuare arătăm că punctul M este ortocentrul triunghiului ACB'. Într-adevăr, fie $\{O\} = AC \cap BD$. Avem $BB' \perp (ABC)$, $BO \perp AC$, deci $B'O \perp AC$, conform teoremei celor trei perpendiculare. De asemenea, $BM \perp (ACB')$, $BO \perp AC$ deci $MO \perp AC$, conform primei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare. Cum $B'O \perp AC$ și $MO \perp AC$ rezultă că dreptele $B'O$ și MO coincid, deci M aparține dreptei $B'O$. Analog se arată că M aparține înălțimii din A pe $B'C$, deci punctul M este ortocentrul triunghiului ACB'.

Fie M' proiecția punctului M pe planul $(ABCD)$; în particular $M' \in BD$. Deoarece triunghiurile MOM' și $B'OB$ sînt asemenea rezultă: $\frac{OM}{OB'} = \frac{MM'}{BB'} = \frac{OM'}{OB} = \frac{1}{3}$, deci $MM' = \frac{2a}{3}$, (1) și $OM' = OB \cdot \frac{MM'}{BB'} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. În triunghiul $M'ON'$ obținem că $M'N' = \frac{2a}{3}$, (2). Din (1) și (2) rezultă că $MNPQM'N'P'Q'$ este un cub de latură $\frac{2a}{3}$. Volumul său este egal cu $V = \left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{8a^3}{27}$.

Soluție dată de *Farcaș Irina*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 11 Roman; *Ion Cristina*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 1 Moreni.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 20677* (G.M. 2/1986, pag. 59)

Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încît:

$$x + y = x^3 + y^3 = x^5 + y^5 = a.$$

Determinați mulțimea tuturor valorilor pe care le poate lua a.

Liviu Pîrșan

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Conform enunțului avem: $x+y=a$; $x^3+y^3=a$ și $x^5+y^5=a$, (1).
Dacă $y=-x$ din cele trei relații obținem $a=0$.

Ne propunem în continuare să găsim numerele $a\neq 0$ pentru care există x și y verificînd relațiile (1). Fie x și y, rădăcinile ecuației de gradul II: $z^2-az+p=0$. Avem $x+y=a$; $x^2+y^2=a^2-2p$; $x^3+y^3=a^3-3ap$; $x^4+y^4=a(x^3+y^3)-p(x^2+y^2)=a^4-4a^2p+2p^2$, deci $x^5+y^5=a^5-5a^3p+5ap^2$, (2).

Din relațiile $x^3+y^3=a^3-3ap$ și $x^3+y^3=a$ rezultă $a^3-3ap=a\Leftrightarrow p=\dfrac{a^2-1}{3}$, (3), deoarece $a\neq 0$. Din relația (2) și $x^5+y^5=a$ rezultă $a=a^5-5a^3p+5ap^2\Leftrightarrow a^4-5a^3p+5p^2=1$. Folosind relația (3) obținem $a^4-5a^3\cdot\dfrac{a^2-1}{3}+5\left(\dfrac{a^2-1}{3}\right)^2=1\Leftrightarrow a^4-5a^3+4=0\Leftrightarrow(a^2-1)\cdot(a^2-4)=0\Leftrightarrow a\in\{-2,-1,1,2\}$.

În concluzie $a\in\{-2,-1,0,1,2\}$.

Soluție dată de *Andreescu Adela*, cl. a IX-a, Lic. „G. M. Murgoci" Brăila; *Huștia Horațiu*, cl. a IX-a, Lic. „G. Bacovia" Bacău.

Problema 20678 (G.M.2/1986, pag. 59)

Pe laturile $[AB]$ și $[DC]$ ale patrulaterului inscris în cercul de centru O se consideră punctele F și respectiv E astfel încît $EO=FO$. Dreptele AD și BC taie secteaza dreapta EF în M și respectiv N și fie P simetricul lui M față de mijlocul segmentului $[AE]$. Să se demonstreze că $\Delta FBN\sim\Delta CEP$.

Emil Cordier, elev, Zalău

Soluție. Deoarece $EO=FO$, punctele E și F au aceeași putere față de cercul dat în ipoteză, adică $ED\cdot EC=FB\cdot FA$, (1).

În continuare vom arăta că $MO=NO$. Fie $\{H\}=AM\cap BN$. Din teorema lui *Menelaus* pentru patrulaterele $ECBF$ și $EDAF$ cu transversalele AM și respectiv BN avem:

$$\frac{ED}{DC}\cdot\frac{CH}{HB}\cdot\frac{BA}{AF}\cdot\frac{FM}{ME}=1 \text{ și respectiv } \frac{EC}{CD}\cdot\frac{DH}{HA}\cdot\frac{AB}{BF}\cdot\frac{FN}{NE}=1.$$

Înmulțind aceste inegalități și ținînd cont că $\dfrac{CH}{HA}=\dfrac{DH}{HB}=\dfrac{CD}{AB}$, după simplificări obținem: $\dfrac{ME\cdot EN}{FM\cdot FN}=1\Leftrightarrow\dfrac{NF}{ME}=\dfrac{NE}{MF}=\dfrac{NF+NE}{MF+ME}=1$, deci $NF=ME$. Deoarece $OE=OF$, deci $\widehat{OFN}\equiv\widehat{OEM}$, avem că triunghiurile DEM și OFN sînt congruente. Rezultă $MO=NO$ ceea ce ne propusesem să arătăm.

Deoarece punctele M și N sînt egal depărtate de centrul cercului rezultă că puterile acestor două puncte față de acest cerc sînt egale, adică $MD\cdot MA=NC\cdot NB$, (2).

Aplicăm din nou teorema lui *Menelaus* pentru patrulaterul $ABCD$ și transversala EF. Obținem:

$$\frac{ED}{EC}\cdot\frac{NC}{NB}\cdot\frac{FB}{FA}\cdot\frac{MA}{MD}=1\Leftrightarrow\frac{ED\cdot EC}{EC^2}\cdot\frac{NC\cdot NB}{NB^2}\cdot\frac{FB^2}{FA\cdot FB}\cdot\frac{MA^2}{MA\cdot MD}=1.$$

Aplicînd relațiile (1) și (2), după simplificări obținem: $\dfrac{FB}{EC}=\dfrac{NB}{MA}$, (3). Deoarece P este simetricul punctului M față de mijlocul segmentului (AE) rezultă că $EMAP$ este paralelogram, deci $DA\parallel EP$. Rezultă $\widehat{NBF}\equiv\widehat{CDA}\equiv\widehat{CEP}$; folosind relația (3) obținem în final că triunghiurile FBN și CEP sînt asemenea, ceea ce trebuie demonstrat.

Soluție dată de *Dodea Daniela*, cl. a IX-a, Lic. mat. fiz. Zalău și *Popescu Valentina*, cl. a IX-a, Lic. ind. 3 Bacău.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a

Problema 20626* (G.M. 12/1985, pag. 472)

Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci:*

a) $\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\frac{2(k-1)\pi}{4n-1} + \prod_{k=1}^{2n-1} \cos\frac{2k\pi}{4n-1} = 0;$

b) $\prod_{k=1}^{2n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{4n-1} = \prod_{k=1}^{2n} \cos\frac{2k\pi}{4n+1}.$

Ionel Tudor, profesor, Călugăreni, Giurgiu

Soluție. Avem:

$$\cos\frac{k\pi}{2p+1} = -\cos\left(\pi - \frac{k\pi}{2p+1}\right) = -\cos\frac{(2p-k+1)\pi}{2p+1}.$$

Dăm lui k, pe rînd, valorile $1, 3, \ldots, 2p-1$ și obținem:

Pentru $k=1$: $\cos\frac{\pi}{2p+1} = -\cos\frac{2p\pi}{2p+1}$

Pentru $k=3$: $\cos\frac{3\pi}{2p+1} = -\cos\frac{(2p-2)\pi}{2p+1}$

. . . . . .

Pentru $k=2p-1$: $\cos\frac{(2p-1)\pi}{2p+1} = -\cos\frac{2\pi}{2p+1}$

Înmulțind membru cu membru aceste egalități se obține:

$$\cos\frac{\pi}{2p+1}\cdot\cos\frac{3\pi}{2p+1}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{(2p-1)\pi}{2p+1} = (-1)^p\cdot\cos\frac{2\pi}{2p+1}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{2p\pi}{2p+1}, \quad (1)$$

Pentru $p = 2n-1$ relația (1) devine;

$$\cos\frac{\pi}{4n-1}\cdot\cos\frac{3\pi}{4n-1}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{(4n-3)\pi}{4n-1} = -\cos\frac{2\pi}{4n-1}\cdot\cos\frac{4\pi}{4n-1}\cdots\cos\frac{(4n-2)\pi}{4n-1}$$

unde

$$\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\frac{(2k-1)\pi}{4n-1} + \prod_{k=1}^{2n-1} \cos\frac{2k\pi}{4n-1} = 0,$$

adică tocmai relația cerută la a).

Pentru $p = 2n$ relația (1) devine:

$$\cos\frac{\pi}{4n+1}\cdot\cos\frac{3\pi}{4n+1}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{(4n-1)\pi}{4n+1} = \cos\frac{2\pi}{4n+1}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{4n\pi}{4n+1}$$

adică

$$\prod_{k=1}^{2n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{4n+1} = \prod_{k=1}^{2n} \cos\frac{2k\pi}{4n+1},$$

adică tocmai relația cerută la punctul b).

Soluție dată de *Munteanu Norocel*, cl. a X-a, Lic. ind. nr. 2 Alexandria și *Piperea Ion*, cl. a X-a, Lic. Călugăreni, jud. Giurgiu.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a

Problema 20692* (G.M. 2/1986, pag. 61)

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $ab > 0$ *şi* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continuă cu proprietatea că* $f(a)\cdot f(b) < 0$. *Să se arate că* $(\exists)\ \theta_1, \theta_2 \in (a,b)$ *astfel încît* $\theta_1+\theta_2 = a+b$ *şi* $af(\theta_1) = bf(\theta_2)$.

Cornel B. Bolovan, profesor, Colţeşti, Vîlcea

Soluţie. Considerăm funcţia:

$$F:\left[\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right]\to\mathbb{R},\quad F(x) = af\left(\frac{a+b}{2}-x\right) - bf\left(\frac{a+b}{2}+x\right).$$

Deoarece funcţia f este continuă rezultă că funcţia F este continuă. În plus avem:

$$F\left(\frac{a-b}{2}\right) = af(b) - bf(a) \text{ şi } F\left(\frac{b-a}{2}\right) = af(a) - bf(b).$$

Rezultă:

$$F\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot F\left(\frac{b-a}{2}\right) = f(a)\cdot f(b)(a^2+b^2) - ab[f^2(a)+f^2(b)], \qquad (1)$$

Dar $f^2(a)+f^2(b) > 2f(a)\cdot f(b)$, (2), inegalitate cunoscută pentru orice două numere reale. În plus, inegalitatea, în cazul nostru, este strictă deoarece $f(a)\neq f(b)$.

În inegalitatea (2) înmulţim cu $-ab < 0$ şi obţinem:

$$-ab[f^2(a)+f^2(b)] < -2ab\cdot f(a)\cdot f(b).$$

Folosind relaţia (1) rezultă că

$$F\left(\frac{a-b}{2}\right)F\left(\frac{b-a}{2}\right) < f(a)f(b)(a-b)^2 < 0,$$

deoarece $f(a)\cdot f(b) < 0$. Deci $F\left(\frac{a-b}{2}\right)F\left(\frac{b-a}{2}\right) < 0$ şi cum funcţia F este continuă rezultă că $(\exists)\ \alpha\in\left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ astfel încît $F(\alpha) = 0$, adică $af\left(\frac{a+b}{2}-\alpha\right) = bf\left(\frac{a+b}{2}+\alpha\right)$.

Notînd cu $\theta_1 = \frac{a+b}{2}-\alpha$ şi $\theta_2 = \frac{a+b}{2}+\alpha$ avem $\theta_1, \theta_2\in(a,b)$, $\theta_1+\theta_2 = a+b$ şi $af(\theta_1) = bf(\theta_2)$, ceea ce trebuie arătat.

Clasa a XII-a

Problema 20696* (G.M. 2/1985, pag. 62)

Să se arate că funcţia:

$$f:[-1,1]\to\left[-\frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right],\qquad f(x) = \frac{2\pi}{3}\cdot x - \arccos x$$

Scanned with OKEN Scanner

este inversabilă și să se calculeze, apoi,

$$\int_{-\pi}^{0} f^{-1}(x)\,dx.$$

Nicolae Crainic, profesor, Alba Iulia

Soluție. Funcția f este injectivă, fiind crescătoare pe $[-1,1]$. Într-adevăr $f'(x)=\frac{2\pi}{3}+$

$+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}>0$ pentru orice $x\in(-1,1)$. Deoarece $f(-1)=-\frac{5\pi}{3}$, $f(1)=\frac{2\pi}{3}$ și f este evident continuă rezultă că are proprietatea lui *Darboux*, adică ia toate valorile cuprinse între $-\frac{5\pi}{3}$ și $\frac{2\pi}{3}$ și deci f este surjectivă, deci inversabilă. Însă se cunoaște următoarea propoziție:

„Dacă $f:[a,b]\to[c,d]$ este o funcție bijectivă, continuă și derivabilă, cu derivata continuă, atunci:

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_c^d f^{-1}(x)\,dx=bd-ac".$$

În cazul problemei luăm:

$$f:\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\to[-\pi,0],\text{ unde } f(x)=\frac{2\pi}{3}x-\arccos x.$$

Avem succesiv:

$$\int_{-\pi}^{0} f^{-1}(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot 0-(-\pi)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=$$

$$=-\frac{\pi}{2}-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{2\pi}{3}x\,dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\arccos x\,dx=$$

$$=-\frac{\pi}{2}+x\arccos x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}=0.$$

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

9. Scrieți numărul 12 folosind șase operații cu numere naturale.

Gh. Heresou, profesor, București

Scanned with OKEN Scanner

10. Aflați ce număr adunat cu el însuși și cu 2 este egal cu 10.

Maria Comănescu, învățătoare, Ploiești

11. Care este cel mai mare număr natural care scăzut din 8 să dea un rezultat număr natural mai mic decît 4?

Maria Comănescu, învățătoare, Ploiești

12. Aflați toate numerele diferite de zero care fiind împărțite la 5 dau la cît și la rest același număr.

I. Ligor, profesor, București

13. Se consideră cifrele 0, 4, 5. Folosind numai fiecare dintre aceste cifre cel puțin o dată să se formeze:
a) cel mai mare număr natural de cinci cifre;
b) cel mai mic număr natural de cinci cifre;
c) cel mai mare număr natural de șase cifre;
d) cel mai mic număr natural de șase cifre.

I. Ligor, profesor, București

14. Se consideră numărul: 3174502698746. Eliminați șapte cifre astfel încît cu cifrele care rămîn, păstrîndu-se ordinea în care se găsesc, să se formeze cel mai mare număr natural ce se poate obține în aceste condiții.

I. Ligor, profesor, București

15. Găsiți perechi de numere naturale a căror sumă să nu fie mai mare decît diferența lor.

Gh. Herescu, profesor, București

16. Găsiți nouă numere naturale (nu neapărat distincte) pentru care suma lor este egală cu produsul lor.

* * *

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9059*. Determinați două fracții ordinare de forma: $\frac{a}{b}$ și $\frac{a}{c}$ unde $a, b, c \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $\frac{a}{b} - \frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c}$.

* * *

E : 9060*. Fie un număr natural A de forma $\overline{abcd}$ scris în baza zece. Să se arate că dacă $a + c = b + d$ atunci numărul A se divide cu 11.

* *

E : 9061. Să se demonstreze că fracția $\frac{10x+53}{7x+37}$ este ireductibilă pentru orice număr natural x.

Lavinia Păune, elevă, Pitești

E : 9062. Un sfert din numărul fetelor este egal cu 2/5 din numărul băieților aceleiași clase, clasă care totalizează 39 de copii. Diferența dintre numărul fetelor și cel al băieților este mai mare cu 1 decît a treia parte din numărul total al abonamentelor făcute la „Gazeta Matematică" pe anul 1985 de către elevii cercului de matematică din școala noastră. Despre cîte abonamente la „Gazeta Matematică" este vorba?

Marin Ionescu, învățător, Bușteni, Prahova

E : 9063*. Determinați numerele naturale n pentru care fracția:

$$\frac{1985+397\cdot n}{1985-397\cdot n}$$

este un număr natural.

Viorel Nicolae, profesor, Slatina

E : 9064. Fie p un număr prim, $p > 3$. Să se demonstreze că restul împărțirii lui p la 6 este 1 sau 5.

* * *

Clasa a VI-a

E : 9065*. Să se determine cel mai mic pătrat perfect care începe cu 1985.

Bogdan Ioan, profesor, Ciceu-Giurgești, Bistrița-Năsăud

E : 9066. a) Suma a șase numere întregi consecutive este un număr prim. Să se afle cele șase numere.

b) Suma a șapte numere întregi consecutive mărită cu 3 este un număr prim de două cifre. Dacă din acest număr prim scădem 6, obținem un multiplu de 5. Să se afle cele șapte numere.

Patrick Popescu-Pampu, elev, București

E : 9067*. a) Să se afle cea mai mare fracție astfel încît împărțind fracțiile $\frac{16}{3}, \frac{26}{5}, \frac{36}{7}, \frac{46}{9}$ prin această fracție se obțin numere întregi.

b) Să se afle cea mai mică fracție, astfel încît împărțind-o cu fracțiile $\frac{16}{115}, \frac{17}{215}, \frac{18}{415}$, să se obțină numere întregi.

Petre Ioniță, Țițești, Argeș

E : 9068. Să se determine un număr din trei cifre divizibil cu 9 știind că dacă scădem din el răsturnatul lui obținem 792.

Traian Covaciu, profesor, Săcel, Maramureș

Scanned with OKEN Scanner

E : 9069 Fie un punct M în interiorul triunghiului ABC, M_1, M_2, M_3 proiecțiile punctului M pe laturile AB, BC, AC și M_1', M_2', M_3' simetricele punctelor M_1, M_2, M_3 față de punctul M. Să se arate că:

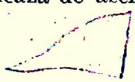
1. $\Delta M_1M_2M_3 \equiv \Delta M_1'M_2'M_3'$.

2. Cum trebuie să fie triunghiul ABC pentru ca $\widehat{M_1MM_3}$ să fie drept?

Emilia Ionescu, profesoară, Răzvad, Dîmbovița

E : 9070*. Se dă triunghiul ABC dreptunghic isoscel ($\hat{A} = 90°$). Mediana $AI (I \in BC)$ se prelungește pînă în punctul D astfel încît $AI \equiv ID$. Să se demonstreze că punctele A, B, C, D formează un pătrat și mijloacele laturilor acestui pătrat formează de asemenea un pătrat.

* * *



Clasa a VII-a

E : 9071. Să se afle care din numerele $\sqrt{\sqrt{13} - \sqrt{11}}$ și $\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{17}}$ este mai mare. Generalizare.

Patrik Popescu-Pampu, elev, București

E : 9072*. Fie triunghiul ABC. Prin intersecția G a medianelor se duce o dreaptă oarecare d care împarte planul în semiplanele S_1 și S_2 ($A \in S_1$, B, $C \in S_2$). Fie d_A, d_L și d_C respectiv distanțele de la A, B și C la dreapta d. Să se arate că $d_A = d_B + d_C$.

Florica Săbăreanu-Banu, profesoară, București

E : 9073. Tangentele în A și B la cercul circumscris triunghiului isoscel ABC ($AB \equiv AC$) se taie în M. Ce poziție are dreapta AC față de cercul circumscris triunghiului ABM?

Radu Nicolae, profesor, Cernele, Craiova

E : 9074*. Să se demonstreze că ecuația $x^2 - 4y^2 = 27$ nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

Daniel Marius Codeci, profesor, Curtea de Argeș

E : 9075. Să se calculeze perimetrul unui triunghi dreptunghic a cărui catetă AC are lungimea de 10 cm și lungimea bisectoarei unghiului drept este de $8\sqrt{2}$ cm.

Ionuț Purcărcanu, elev, Medgidia

E : 9076*. Să se afle aria unui patrulater convex ale cărui laturi, în ordine succesivă, sînt de 20, 24, 7 și 15 unități de lungime.

Ilie Trifon, profesor, Pitești

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VIII-a

E : 9077. Dacă $(1+2X+X^2)^{993}=\sum_{k=0}^{1986}a_kX^k$, să se arate că $a_0+a_2+a_4+\ldots+a_{1986}=a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{1985}$.

Gh. Boja, profesor, Suhaia, Teleorman

E : 9078*. Determinați toate numerele naturale prime p cu proprietatea că p^2+13 este număr prim.

* * *

E : 9079. Să se arate că suma $S=6+6^3+6^5+\ldots+6^{69}$ se divide cu 210.

Nicolae Tălău, profesor, Craiova

E : 9080. Demonstrați că numărul $\underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{222\ldots2}_{n}$ este produsul a două numere naturale consecutive, oricare ar fi n natural.

Aurel Doboșan, profesor, Lugoj

E : 9081*. Pe laturile VA, VB și VC ale piramidei triunghiulare $VABC$ se consideră punctele M, N și respectiv P. Cunoscînd că $VA\cdot VB\cdot VC=2\,VM\cdot VN\cdot VP$, să se arate că volumul piramidei $VMNP$ este jumătate din volumul piramidei $VABC$.

Iulian Stănică, profesor, Marotinu de Sus, Dolj

E : 9082*. Se consideră polinoamele:

$$P(x)=x^3-6x^2+11x-6 \quad \text{și} \quad Q(x)=ax+b,\ a\neq 0.$$

Să se rezolve ecuația: $P(Q(x))=0$ și să se găsească o relație între rădăcinile acestei ecuații, independentă de a și b.

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G. : 41. Arătați că $(\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$ fracția

$$f(n)=\frac{n^{10}+n^3+n+1}{n^9+n^3+n^2+1}$$

se poate simplifica.

Liviu Pîrșan

O.G. : 42. Fie ABC un triunghi isoscel cu $\sphericalangle B=108^\circ$ și $AB\equiv BC$. Considerăm BD înălțimea dusă din B iar AF bisectoarea interioară a unghiului A, $(F\in BC)$. Demonstrați că $AF=2BD$.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21009*. Rezolvați în $\mathbb{R}^n$ sistemul de ecuații:
$(x_1 + x_2)^3 = x_3$, $(x_2 + x_3)^3 = x_4$, ..., $(x_n + x_1)^3 = x_2$.

(*Matematika v şcole* nr. 4/1986)

21010. Fie un triunghi isoscel ABC astfel încît $BC > AB \cdot \sqrt{2}$ și punctele M, N situate pe latura $[BC]$. Să se arate că:

$$m(\widehat{MAN}) = 90^\circ \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 - MN^2 = BM \cdot MC + BN \cdot NC.$$

(Generalizarea problemei E : 8785 din G.M. nr. 2/1986).

I. Safta, profesor, Pitești

21011. Să se determine perechile de numere naturale (a, b) pentru care ecuațiile:

$$x^2 - ax + b = 0, \quad (1) \text{ și } y^2 - by + a = 0, \quad (2)$$

au toate rădăcinile numere naturale.

Lia și *Ivan Cernea*, profesori, Satu Mare

21012*. Fie înălțimea AH dusă în triunghiul ABC. Cercurile cu centrele în B și C, de raze BH, respectiv CH intersectează laturile AB și respectiv AC, în M, respectiv N. Să se arate că

$$\frac{AM}{AN} = \frac{2AC - AN}{2AB - AM}.$$

Laura Constantinescu, profesoară, Sibiu

21013. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{x^2 + 1}{x + 1}\right] = -2x + 1,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Gh. Boja, profesor, Suhaia, Teleorman

21014*. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, dat și $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$x + n\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{n+1}{y}.$$

Ce valori poate lua produsul xy?

Liviu Pîrșan, București

21015. Fiind dat patrulaterul convex $ABCD$, unde $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$, iar S — aria patrulaterului $ABCD$, p — semiperimetrul patrulaterului $ABCD$, să se arate inegalitatea:

$$1 + \frac{2S}{ef} \leqslant \frac{2p\sqrt{2}}{e + f}.$$

Să se precizeze pentru ce patrulatere convexe avem egalitate. Să se arate că dacă $ABCD$ este patrulater ortodiagonal, atunci inegalitatea devine: $e + f \leqslant p\sqrt{2}$.

Virgil Nicula, profesor, București

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a

21016*. Fie ABC un triunghi, a, b, c laturile sale și m_a, m_b, m_c medianele duse din A, B, respectiv C. Notînd $a^2+b^2+c^2=l^2$, $l>0$, să se demonstreze că:

1) $m_a+m_b+m_c\leqslant\frac{3l}{2}$;

2) $\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{l\sqrt{3}}{2R}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Mihaela Predescu, profesoară, Pitești

21017. Fie $p\in\mathbb{N}$ și $f\in Z[X]$ astfel încît

$$f(p)=6;\ f(p+1)=18;\ f(p+2)=54.$$

Determinați numărul soluțiilor în numere întregi ale ecuației $f(x)=2$.

Vilia Banță, profesoară, Gălbinași

21018. Să se calculeze suma:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i C_n^i}{k+i+2}.$$

Bogdan Trențea, student, București

21019*. Se dă hexagonul regulat $ABCDEF$ înscris în cercul $\mathcal{C}(O)$ și un punct oarecare M situat pe arcul $\overset{\frown}{AB}$. Să se demonstreze că există relațiile

I) $\frac{MA+2MC}{MB+2MF}=\frac{MD}{ME}$; II) $\frac{MA+MC}{MB+MF}=\frac{ME}{MD}$.

Gh. D. Simionescu

21020. Fie polinomul $P=X^4-\sqrt{3}\,mX+n$, $m,\ n\in\mathbb{Q}$.

a) Să se determine m și n știind că restul împărțirii polinomului $P(X+2)$ la $(X+1)$ este $3-\sqrt{3}$.

b) Pentru m și n determinați anterior să se rezolve ecuația $P(x)=0$.

Ioan Crișan, profesor, Arad

21021. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC avem inegalitatea

$$p\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)>\frac{9}{7}(2\sqrt{2}+1).$$

D. M. Bătinețu-Giurgiu, profesor, București

21022*. Fie un triunghi ABC și M un punct în interiorul său. Prin M ducem o paralelă la BC care taie AB și AC în P și respectiv Q, o paralelă la AC care taie AB și BC în T și respectiv U și o paralelă la AB care taie AC și BC în S și R. Arătați că:

$$\sigma[MTP]+\sigma[MSQ]+\sigma[MRU]\geqslant\sigma[ATS]+\sigma[BPR]+\sigma[CQU].$$

Mihaela Banyai, profesoară, București

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a

21023. Fie matricele $A \in M_n(\mathbb{R})$ și $B \in M_n(\mathbb{R})$. Dacă $A + B = I$ și $A \cdot B = O$, unde $I, O \in M_n(\mathbb{R})$ și sînt matricea unitate, respectiv matricea cu toate elementele nule, să se arate că:

$$(pA + qB)^n = p^n A + q^n B$$

unde $p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Gheorghe Bordea, Constanța

21024. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$,

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \cos \frac{a}{2^n} \, x_n + \frac{\sin a}{2^n \sin \frac{a}{2^n}} \quad (\forall) n \geq 1, \; a \in (0, \pi).$$

Să se afle $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{n}$.

Mariana Zamfir, elevă, Galați

21025. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$, un interval și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție monotonă. Să se arate că $f(I)$ nu poate fi scrisă ca reuniune de două intervale disjuncte.

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

21026*. Definim șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel încît $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ și $(n+1)a_{n+1} - (n + x + 1)a_n + xa_{n-1} = 0$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ este fixat.
Să se arate că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și să i se calculeze limita.

Mihail Bencze, profesor, Brașov

21027*. Fie $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, două funcții cu proprietățile următoare:
i) g este derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu derivata mărginită;
ii) $|h(x) - h(y)| \geq |x - y|$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$.
Pentru $a \in \mathbb{R}$, definim funcția $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = h(x) + a \cdot g(x)$.
Să se arate că există o mulțime infinită $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, astfel încît:
a) $f_a(x)$ este injectivă, $(\forall)\, a \in E$.
b) Dacă h este și surjectivă, atunci $f_a(x)$ este bijectivă, $(\forall)\, a \in E$.

Gabriel Chiriacescu, Dragomirești Vale

21028*. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică ecuația funcțională:

$$f(x + y) = f(x) + y, (\forall) \; (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Călin Burdușel, profesor, Tîrgoviște

21029. Fie P_1, P_2, P_3 trei polinoame cu coeficienți reali de gradul al doilea și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție definită astfel: $f(x) = \max\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$. Atunci:
f este derivabilă pe $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ unul din cele trei polinoame le majorează pe celelalte două.
Generalizare.

Gh. Sirețchi, lector, București

Clasa a XII-a

21030. Să se determine polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad minim știind că $P(a) = M$; $P(b) = m$; $a < b$; $m < M$, iar m și M reprezintă, respectiv, minimul și maximul local pe $\mathbb{R}$ al lui P.

M. Haivas, cercet. științific, Iași

Scanned with OKEN Scanner

21031. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ continue. Să se arate că dacă pentru $(\forall)\, x \in [a, b]$ avem

$$|f(x)| \leqslant \int_a^x f(t)g(t)\,dt, \text{ atunci } f \equiv 0.$$

(În legătură cu problemele: *C*:479 din G.M. 2/1985; 20585 din G.M. 10/1985; Nr. 4, Faza pe țară 1985, cl. a XII-a).

Gheorghe Stoica, București

21032. Fie familia de funcții

$$\mathscr{F} = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f^{2n}(x) = x^{2n},\ (\forall)x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}^*\}.$$

a) Determinați toate funcțiile $f \in \mathscr{F}$ cu proprietatea că f posedă primitive pe orice interval $I \subset \mathbf{R}$.

b) Determinați toate funcțiile $f \in \mathscr{F}$ cu proprietatea că f nu posedă primitive pe nici un interval $I \subset \mathbf{R}$.

Ștefan Alexe și *Sorin Simion*, profesori, Pitești

21033*. Să se calculeze integrala:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}\,dx, \text{ unde } c \cdot d > 0.$$

M. Haivas, cercet. științific, Iași

21034. Considerăm funcția $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ unde $f(x) = \sqrt{2x + \sin x}$. Să se arate că f este bijectivă și apoi să se calculeze $\int_0^{2\sqrt{\pi}} xf^{-1}(x)\,dx$.

Vasile Berghea, Avrig, Sibiu

21035*. Mulțimea V a vectorilor din plan se poate organiza ca inel?

* * *

21036*. Să se calculeze o primitivă pe $(0, \infty)$ a funcției $f(x) = \dfrac{2 + x^2}{x(1 + x^2)^n}$ unde $n \in \mathbf{N}^*$.

Costache Slabu, profesor, Suceava

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M.

O:503. Fie S_n mulțimea permutărilor de gradul n și $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$. Prin definiție spunem că $\sigma_1 < \sigma_2$ dacă $\sigma_1(1) < \sigma_2(1)$ sau există $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 2$ așa încît $\sigma_1(k) < \sigma_2(k)$ și $\sigma_1(i) = \sigma_2(i)$ oricare ar fi $i < k$. Să se construiască permutarea $\sigma \in S_n$ așa încît există exact $m \in \mathbf{N}^*$ permutări mai mici decît σ.

Dan Popa, elev, București

O:504. Fie $p \in \mathbf{N}^*$ un număr prim, $p \equiv 2 \pmod 3$ și $a, b \in \mathbf{Z}$ așa încît p divide $a^2 + ab + b^2$. Să se arate că p divide pe a și pe b.

R. Gh. Zamfir, profesor, Slobozia

Scanned with OKEN Scanner

O : 505. Să se arate că există o colorare cu 4 culori a mulțimii $\{1,2,\ldots,1987\}$ care nu conține nici o progresie aritmetică monocromatică cu 10 termeni.

Ioan Tomescu

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL ÎA REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C : 665. Dacă notăm $\{z\}$ — partea fracționară a numărului real z atunci are loc identitatea : $\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right\}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-2^k}{2^{k+1}}$.

Vasile Dilimoț-Niță, profesor, București

C : 666. Să se determine α și β reale astfel încît

(1) $\cos(\sin x+\alpha)\geqslant\sin(\cos x+\beta)$, $(\forall)\, x\in\mathbf{R}$.

Să se reprezinte într-un sistem de axe de coordonate mulțimea

$$\{(\alpha,\beta)\mid \alpha \text{ și } \beta \text{ au proprietatea (1)}\}.$$

Ovidiu Pop, profesor, Satu Mare

C : 667. Se consideră un triunghi ABC în care I este centrul cercului înscris iar D, E, F punctele de contact ale aceluiaș cerc cu laturile AB, BC, CA. Notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor opuse respectiv lui A, B, C și cu D', E', F', mijloacele cevienelor CD, AE respectiv BF. Să se demonstreze că dreptele $A'E'$, $C'D'$, $B'F'$ sînt concurente în I.

Dan Popa, elev, București

C : 668. În triunghiul acuțitunghic ABC notăm cu d_1, d_2, d_3 suma distanțelor de la punctele H, I, respectiv O, la laturi.

1) Să se demonstreze că $d_1\leqslant d_2\leqslant d_3$.

2) Dacă $\max(a,b,c)<2\min(a,b,c)$, să se arate că se poate construi un triunghi cu laturile de lungimi d_1, d_2, d_3. (În legătură cu articolul „O inegalitate geometrică", G.M. 4/1982, pag. 113).

Petre Carabeț, student, București

Clasele a XI-a și a XII-a

C : 669. Să se arate că orice grup cu mai puțin de 6 subgrupuri este comutativ. Să se dea un exemplu de grup necomutativ cu 6 subgrupuri.

M. Andronache, profesor, București

C : 670. Funcția $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $n\in\mathbf{N}^*$ și

$$f_n(x)=\begin{cases}\lambda_n, & x=0\\ \sin^n\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

admite primitive pe $\mathbf{R}$ dacă și numai dacă

$$\lambda_n = \frac{1}{2^n} C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(1 - 2\left\{\frac{n}{2}\right\}\right).$$

Să se determine $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$.

Virgil Nicula, profesor, București

C : 671. Dacă matricea A este inversabilă în inelul $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ și matricile A și A^{-1} au toate elementele numere naturale, atunci pe fiecare linie și pe fiecare coloană a matricii A se află un singur element egal cu 1, iar celelalte sînt egale cu 0.

Mihaela Bădescu, profesoară, Bucureşti

C : 672. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$ și $a \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n \leqslant b$. Dacă $(\exists)\beta_i > 0$, $i = \overline{1,k}$ astfel încît $\beta_1 \cdot f(\alpha_1) + \beta_2 \cdot f(\alpha_2) + \ldots + \beta_k \cdot f(\alpha_x) = 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $[a, b]$.

Oliver Konnerth, profesor, Sibiu

PROBLEME DE INFORMATICĂ

I : 309. Se consideră următorul subprogram FORTRAN

```
      SUBROUTINE POWER (A, N. W)
      INTEGER A, N. W
      W = 1
   10 IF(N.EQ.O) RETURN
      IR = N−(N/2)*2
      IF(IR.EQ.O) GO TO 20
      W = W*A
      N = N − 1
      GO  TO  10
   20 A = A*A
      N = N/2
      GO TO 10
      END
```

a) Să se arate că dacă subrutina este apelată cu valorile $A = a_0$ și $N = n_0$, atunci valoarea W calculată prin subrutină este $W = a_0^{n_0}$.

b) Să se calculeze explicit în funcție de n_0 numărul total de înmulțiri și împărțiri efectuate de subrutină pentru calculul lui $a_0^{n_0}$. De exemplu, pentru calculul lui a_0^{4095} cîte înmulțiri și împărțiri efectuează subrutina?

c) Observați că „strategia de calcul" a subrutinei este strîns legată de scrierea lui n_0 în baza 2. Dați o subrutină similară care să-l calculeze pe $a_0^{n_0}$ bazîndu-se pe scrierea lui n_0 în baza 3 și comparați numărul total de înmulțiri și împărțiri ale noii subrutine cu cel al subrutinei din enunț.

Șerban Buzeteanu, matematician, C.C.U.B.

I : 310 Să se realizeze un program FORTRAN care să calculeze numărul $\sup_{x \in A} \inf_{k \in \mathbf{N}} |x - k|$, unde $A = \left\{ \frac{i}{10^4} \,\middle|\, i \in \{0, 1, 2, \ldots, 10^4\} \right\}$.

Marin Vlada, matematician, București

Scanned with OKEN Scanner

Atât de singur

TALISMAN

I O văd tremurând, cu ochii închiși,
Cu pare în jur, genunchii strânși,
Slăbită și tristă, cu cearcăne adânci.
Și vrea să-i promit că n-am să uit
Imagini și locuri din trecut
Și visele-n care noi doi am crezut.

R: _

II Și stă în genunchi la piept ținând,
O veche scrisoare și plângând
Îmi spune prin lacrimi, ce mult i-a plăcut.
Și vrea să-i promit că n-am mințit,
În tot ce i-am scris și mi-a șoptit
Că pleacă cu gândul, că noi ne-am iubit.

R: Sunt nopți întregi când plâng
Și-adorm cu tine-n gând,
Plecată ești pe veci,
Departe-n umbre reci.
Singur, atât de singur
Simt dureri pe care nu mai pot să le-ndur
Lacrimi, nopți în lacrimi
Și-n inima mea doar lacrimi.

Diaconu

Diaconu Irina

ISSN 0016–5441

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Irina Diaconu

3

DIN CUPRINS:

—A XXVII-A OLIMPIADĂ INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ, VARŞOVIA, 1986

—SOLUŢII LA UNELE PROBLEME DE MATEMATICĂ DATE LA ADMITEREA ÎN ÎNVĂŢĂMÎNTUL SUPERIOR 1986

—NOTĂ MATEMATICĂ

—PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, LICEU, O.I.M. ŞI CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

—PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU GIMNAZIU ŞI DE INFORMATICĂ

—RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

ANUL XCII nr. 3/1987

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

1. A XXVII-a olimpiadă internațională de matematică, de *Ioan Tomescu* 97
2. Soluțiile problemelor date la admiterea în Institutele politehnice, sesiunea specială iunie 1986, pentru elevii din echipa olimpică 1986, de *D. M. Bătinețu-Giurgiu, D. Costescu* și *Valentin Tudose* 105
3. Caracterizări ale patrulaterelor inscriptibile, de *Maria Elena Panaitopol* 110
4. Unele inegalități deduse din studiul unor funcții, de *Gh. Micu-lescu* 111
5. Probleme pentru ciclul primar (17—24) 113
6. Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E : 8795, E : 8804, E : 8835, E : 8817) 114
7. Probleme pentru gimnaziu (E : 9083—E : 9106) 116
8. Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu (O.G. : 43, 44) 118
9. Probleme rezolvate pentru liceu (20701, 20655, 20717, 20726) 119
10. Probleme pentru liceu (21037—21064) 120
11. Probleme pregătitoare pentru O.I.M. și O.B.M. (O : 506—O : 508) 124
12. Probleme pentru concursul anual al rezolvitorilor (C : 673 — C : 680) 124
13. Probleme de informatică (I : 313—I : 316) 125
14. Rubrica rezolvitorilor de probleme 125

ANUL XCII **3** 1987

COMITETUL DE REDACȚIE

Lector univ. Dumitru Acu, Sibiu; lector univ. Toma Albu; lector univ. Horea Banea, Brașov; lector univ. Octavian Băsică; conf. univ. Dan Brânzei, Iași; prof. Constantin Cărbunaru; prof. Marcel Chiriță; prof. Pal Dalyay, Tg. Mureș; lector univ. Inocențiu Drăghicescu; prof. Ioana Drăghici; inv. Alexandrina Dumitru; prof. Ilie Gheorghiță; prof. Adrian Ghioca, Sinaia; cercetător principal Gheorghe Gussi; lector univ. Stere Ianuș; prof. Ștefan Kádar, Baia Mare; lector univ. Constantin Niță; prof. univ. Arpad Pal, Cluj-Napoca; lector univ. Laurențiu Panaitopol; prof. Olimpia Popescu, Ploiești; matematician programator Paul Radovici-Mărculescu; lector univ. Gheorghe Sirețchi; lector univ. Ioan Tomescu; prof. Florin Vulpescu-Jalea.

REDACȚIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor șef (delegat): Acad. N. Teodorescu; redactori principali: prof. Ilie Ilieșcu, prof. Liviu Pîrșan, prof. Marcel Țena; redactori principali onorifici: prof. C. Ionescu-Țiu, asist. univ. Elflerle Rogal; redactori: prof. Liliana Balaci, prof. Alexandru Constantinescu.

Responsabil de număr: prof. L. Pîrșan

ADRESA REDACȚIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.53 — București 1, cod 79543.
Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA — Sectorul Export-Import-Presă, Calea Griviței nr. 64—66, P.O. Box 12—201, Telex 10376 Prsfir București, ROMÂNIA.

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XCII nr. 3 martie 1987

A XXVII-a OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

de lector dr. Ioan Tomescu, Facultatea de matematică, Universitatea din București

A XXVII-a olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat la Varșovia între 4 și 15 iulie 1986, reunind concurenți din 37 de țări. Premiile obținute de echipa română, alcătuită din 6 elevi, au fost următoarele:

Premiul întîi: *Dabija Marius*, clasa a XI-a, Liceul de matematică-fizică „Mihai Viteazul" din Ploiești și *Beli I. Nicolae*, clasa a XI-a, Liceul de matematică-fizică nr. 1 din București;

Premiul al II-lea: *Grindeanu Iulian*, clasa a XII-a, Liceul de matematică-fizică nr. 2 din Cluj-Napoca și *Anițescu I. Mihai*, clasa a XII-a, Liceul „Nicolae Bălcescu" din Craiova;

Premiul al III-lea: *Bucur N. D. Dorin*, clasa a XII-a, Liceul „Ioan Slavici" din Arad.

Clasamentul neoficial pe echipe al primelor opt clasate la această ediție a O.I.M. este următorul:

1—2. S.U.A. și U.R.S.S., 203 p.; 3. R. F.G., 196 p.; 4. R. P. Chineză, 177 p.; 5. R.D.G., 172 p.; 6. R. S. România, 171 p.; 7. R.P. Bulgaria, 161 p.; 8. R. P. Ungară, 151 p.

Pentru probele scrise din zilele de 9 și 10 iulie juriul a selectat dintre cele 79 probleme trimise de țările participante, următoarele șase:

1. *Fie d un întreg strict pozitiv diferit de* 2, 5, 13. *Să se arate că se pot determina două numere distincte a, b din mulțimea* {2, 5, 13, *d*} *astfel încît ab*−1 *să nu fie pătratul unui număr întreg.*

(R.F.G.)

2. *Se consideră în plan un triunghi* $A_1A_2A_3$ *și un punct* P_0. *Se definește* $A_s = A_{s-3}$ *pentru orice* $s \geqslant 4$ *și se construiește un șir de puncte* $P_0, P_1, P_2, \ldots$, *astfel încît* P_{k+1} *este imaginea punctului* P_k *prin rotația de centru* A_{k+1} *și de unghi cu măsura egală cu* 120° *în sensul acelor de ceasornic* ($k = 0, 1, 2, \ldots$). *Să se arate că dacă* $P_{1986} = P_0$ *atunci triunghiul* $A_1A_2A_3$ *este echilateral.*

(R. P. Chineză)

3. *Fiecărui vîrf al unui pentagon regulat i se asociază cîte un număr întreg, astfel încît suma celor* 5 *numere să fie strict pozitivă. Dacă trei vîrfuri consecutive au asociate numerele x, y, respective z astfel încît* $y < 0$, *se definește următoarea operație: numerele x, y, z se înlocuiesc prin* $x + y$, $-y$, *respectiv* $z + y$.
Aceste operații se aplică atît timp cît există cel puțin un număr strict mai mic ca zero. Să se determine dacă acest proces se termină după un număr finit de operații.

(R.D.G.)

4. *Fie A, B două vîrfuri consecutive ale unui poligon regulat cu n vîrfuri* ($n \geqslant 5$) *avînd centrul O. Un triunghi XYZ congruent cu OAB este plasat inițial astfel încît punctele X, Y, Z coincid respectiv cu O, A, B. Triunghiul XYZ se deplasează în planul poligonului astfel încît punctele Y și Z se găsesc pe laturile poligonului, iar X rămîne în interiorul acestuia. Care este locul geometric descris de X cînd Y parcurge în întregime conturul poligonal?*

(Islanda)

5. *Să se determine toate funcțiile f definite pe mulțimea numerelor reale nenegative și care iau valori în aceeași mulțime, avînd proprietățile:*

a) $f(xf(y))\,f(y) = f(x + y)$ *pentru orice* $x, y \geqslant 0$.

b) $f(2) = 0$

c) $f(x) \neq 0$ *pentru orice* $0 \leqslant x < 2$.

(Anglia)

6. *Se consideră o mulțime finită M de puncte în plan cu proprietatea că fiecare punct din M are ambele coordonate numere întregi. Să se decidă dacă este posibil întotdeauna să se coloreze unele puncte din M cu roșu iar punctele rămase cu alb, astfel încît pentru orice dreaptă L paralelă cu oricare*

Scanned with OKEN Scanner

din cele două axe de coordonate, diferența în valoare absolută dintre numărul de puncte din M colorate cu roșu și numărul de puncte din M colorate cu alb care se găsesc pe L să fie mai mică sau egală cu 1. Justificați răspunsul. (R.D.G.)

Pe baza mediilor notelor obținute de concurenți s-a stabilit că cele mai dificile probleme din concurs au fost 3) și 6).

Prezentăm în continuare enunțurile altor probleme care nu fost discutate în juriul internațional.

7. *Fie A, B, C trei puncte situate pe marginea unui lac circular astfel încît B este la vest de C iar ABC este un triunghi echilateral având lungimea laturii de 86 metri. Un băiat înoată de la A către B. După ce a parcurs o distanță de x metri își schimbă direcția și înoată către vest paralel cu BC, atingînd malul după ce a mai parcurs y metri. Să se determine x și y dacă ambele sînt numere întregi și pozitive.* (S.U.A.)

8. *Fie n un întreg pozitiv și p un număr prim, $p>3$. Să se determine cel puțin $3(n+1)$ (într-o versiune mai ușoară numai $2(n+1)$) triplete de numere întregi și pozitive x, y, z care verifică ecuația*

$$xyz = p^n(x+y+z)$$

și care nu se obțin unul din celălalt printr-o permutare a componentelor. (R. S. Cehoslovacă)

9. *Numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfac inegalitățile $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ și $\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n+1} \frac{1}{x_i - x_j} = 0$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$, unde s-a notat $x_0 = 0$ și $x_{n+1} = 1$. Să se demonstreze că $x_{n+1-i} = 1 - x_i$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$.* (Franța)

10. *Dintr-o mulțime de n jucători se selectează q echipe de dublu formate din cîte doi jucători, care se marchează cu numerele $1, 2, \ldots, q$ astfel încît oricare două echipe distincte să primească numere diferite. Fie m cel mai mic întreg mai mare sau egal cu $\frac{2q}{n}$. Să se arate că se poate determina un șir de m echipe distincte două cîte două astfel încît:*

(a) *Fiecare pereche de echipe consecutive din șir au un jucător în comun;*

(b) *Numerele asociate echipelor din șir sînt în ordine crescătoare.* (S.U.A.)

11. *Trei persoane A, B, C joacă următorul joc: Se selectează la întîmplare o submulțime cu k elemente a mulțimii $\{1, 2, \ldots, 1986\}$, unde k este un întreg fixat, $1 \leqslant k \leqslant 1986$, astfel încît toate selecțiile să fie egal probabile. Cîștigătorul jocului este A, B sau C, după cum suma numerelor din submulțimea aleasă cu k elemente dă un rest egal cu 0, 1 sau respectiv 2 prin împărțirea la 3. Pentru ce valori ale lui k acest joc este echitabil, adică A, B și C au probabilități de cîștig egale?* (R. P. Ungară)

12. *Fie $f(n)$ cel mai mic număr de puncte distincte două cîte două din plan astfel încît pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$ există o dreaptă care conține exact k dintre aceste puncte. Să se determine $f(n)$.* (R. P. Bulgaria)

13. *Se notează cu D, E, F, punctele de tangență ale cercului înscris într-un triunghi ABC cu laturile BC, CA și respectiv AB și cu X, Y, Z mijloacele segmentelor $[EF]$, $[FD]$ și respectiv $[DE]$. Să se demonstreze că centrele cercurilor ABC, XYZ și centrul cercului înscris în triunghiul ABC sînt trei puncte coliniare.* (Israel)

14. *Fie $ABCD$ un patrulater convex ale cărui vîrfuri nu se găsesc pe un cerc. Se notează cu A', B', C', D' centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BCD, ACD, ABD și respectiv ABC și cu T transformarea definită prin $T(ABCD) = A'B'C'D'$. Fie $A''B''C''D'' = T(A'B'C'D') = T(T(ABCD))$.*

a) *Să se arate că $ABCD$ și $A''B''C''D''$ sînt asemenea.*

b) *Raportul de asemănare depinde numai de măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$. Să se determine acest raport.* (Olanda)

Scanned with OKEN Scanner

15. *Fie ABC un triunghi și AX, BY, CZ trei ceviene concurente într-un punct D interior triunghiului ABC. Să se arate că dacă două dintre patrulaterele $DYAZ$, $DZBX$ și $DXCY$ sînt circumscriptibile cîte unul cerc, atunci și al treilea este circumscriptibil.*

(Turcia)

16. *Se dă un tetraedru $ABCD$ astfel încît $AD = BC = a$; $AC = BD = b$ și $AB \cdot CD = c^2$. Fie $f(P) = AP + BP + CP + DP$, unde P este un punct arbitrar în spațiu. Să se calculeze minimul lui $f(P)$ în funcție de a, b și c.*

(R. P. Bulgaria)

17. *Se dă un tetraedru $ABCD$. Să se arate că pentru orice vîrf X al său suma măsurilor celor trei unghiuri ale fețelor care au vîrful în X este egală cu $180°$, dacă și numai dacă fețele tetraedrului sînt triunghiuri congruente.*

(Canada)

18. *Fie $ABCD$ un tetraedru pentru care suma lungimilor oricăror două muchii opuse este egală cu 1. Se notează cu r_A, r_B, r_C și r_D lungimile razelor cercurilor înscrise în triunghiurile BCD, ACD, ABD și respectiv ABC. Să se demonstreze că*

$$r_A + r_B + r_C + r_D \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3},$$

iar egalitatea are loc numai dacă $ABCD$ este un tetraedru regulat.

(Turcia)

Soluții

1. Să presupunem că proprietatea nu are loc, deci există numerele întregi x, y, z astfel încît

$$2d-1 = x^2;\ 5d-1 = y^2;\ 13d-1 = z^2.$$

Rezultă că x este impar, deci $2d = x^2 + 1 \equiv 2 \pmod 8$, deci d este impar. Obținem că y și z sînt pare, deci $y = 2y_1$ și $z = 2z_1$ cu y_1, z_1 numere întregi. Deoarece $z^2 - y^2 = 8d$ deducem $(z_1 - y_1)(z_1 + y_1) = 2d$. Rezultă că $z_1 \equiv y_1 \pmod 2$ și deci $(z_1 - y_1)(z_1 + y_1) \equiv 0 \pmod 4$, ceea ce este contradictoriu deoarece d este impar.

2. Să utilizăm numerele complexe pentru a reprezenta pozițiile punctelor în plan, notînd cu p_k și a_k afixele punctelor P_k și respectiv A_k pentru $k \geqslant 1$. Fie P_0 originea planului. După pasul k obținem

$$p_k = a_k + (a_k - p_{k-1})e^{\frac{\pi i}{3}},\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Deci $p_k = (1+u)(a_k - ua_{k-1} + u^2a_{k-2} - \ldots + (-1)^{k-1}u^{k-1}a_1)$, unde $u = e^{\frac{\pi i}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Prin ipoteză avem:

$$0 = p_0 = p_{1986} = a_{1986} - ua_{1985} + u^2a_{1984} - \ldots + u^{1984}a_2 - u^{1985}a_1.$$

Deoarece $a_s = a_{s-3}$ pentru orice $s \geqslant 4$, egalitatea scrisă se reduce la

$$(1 - u^3 + u^6 - \ldots - u^{1983})(a_3 - ua_2 + u^2a_1) = 0,$$

sau

$$662(a_3 - ua_2 + u^2a_1) = 0,$$

deoarece $u^3 = -1$. Dar $u^2 = u - 1$, deci $a_3 - a_1 = u(a_2 - a_1)$. Se obține

$$|a_3 - a_1| = |a_2 - a_1| \text{ și } m(\widehat{A_2A_1A_3}) = 60°,$$

deci triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral. Din egalitatea scrisă mai rezultă de asemenea că vîrfurile A_1, A_2, A_3 sînt aranjate în această ordine în sens invers acelor de ceasornic.

Vom prezenta în continuare pentru această problemă o *soluție geometrică* dată în concurs de *Grindeanu Iulian*:

Se definesc R_1, R_2, R_3 cu fiind rotațiile planului de centre A_1, A_2 și respectiv A_3 și unghiuri egale cu $-120°$ (semnul se referă la sensul trigonometric). Orice rotație R a planului, de

Scanned with OKEN Scanner

centru A și unghi 2α se poate scrie sub forma $R = S_2S_1$, unde S_1 și S_2 sînt simetrii ale planului, determinate de două drepte d_1 și d_2 astfel încît $d_1 \cap d_2 = \{A\}$, iar unghiul dintre d_1 și d_2 are măsura α. Să presupunem prin reducere la absurd că triunghiul $A_1A_2A_3$ nu este echilateral. În acest caz vom arăta că $R_3R_2R_1$ este o translație de vector nenul. Pentru aceasta R_1 se scrie ca o compunere de două simetrii: S_1 de axă MA_1 și S_2 de axă A_1A_2, unde A_1A_2M este un triunghi echilateral cu $m(\widehat{A_2A_1M}) = 60°$. Fie S_3 simetria față de MA_2. Rezultă că $R_1 = S_2S_1$, $R_2 = S_3S_2$ și $R_2R_1 = S_3S_2^2S_1 = S_3S_1$. Deoarece unghiul dintre MA_1 și MA_2 are măsura de 60°, rezultă că S_3S_1 este o rotație R de centru M și unghi $+120°$. Dacă $A_1A_2A_3$ nu este triunghi echilateral rezultă $M \neq A_3$. Să arătăm că R_3R este o translație, scriind $R = S_5S_4$, $R_3 = S_6S_5$, unde S_6 este simetria de axă MA_3. Rezultă că S_4 este simetria de axă MN, unde $m(\widehat{NMA_3}) = 60°$, iar S_5 este simetria de axă QA_3, unde $m(\widehat{MA_3Q}) = -60°$. Dar $MN \parallel A_3Q$ și $R_3R = S_6S_4$ este o translație T cu lungimea vectorului egală cu de două ori distanța dintre MN și A_3Q, adică cu $2A_3M \sin 60° \neq 0$. Deci $P_2 = R_3R_2R_1(P_0) = T(P_0)$ și analog se deduce $P_{3k+3} = T(P_{3k})$ pentru $k \geqslant 0$. Deci $P_{1986} = T^{662}(P_0)$. Dar T^{662} este tot o translație, de vector de lungime $1324\ A_3M \sin 60° \neq 0$, ceea ce implică $P_{1986} \neq P_0$. Deci neapărat $A_3 = M$, de unde rezultă că $A_1A_2A_3$ este un triunghi echilateral cu $m(\widehat{A_2A_1A_3}) = +60°$.

3. Problema cere să se arate că procesul are un număr finit de etape, oricare ar fi ordinea de aplicare a operațiilor definite în enunț. Presupunem că virfului P_i i se asociază întregul x_i pentru $i = 1, \ldots, 5$. Să definim funcția:

$$f(x_1, \ldots, x_5) = \sum_{i=1}^{5} (x_{i+1} - x_{i-1})^2, \text{ unde } x_0 = x_5 \text{ și } x_6 = x_1.$$

Dacă de exemplu $x_3 < 0$ și vectorul $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ se înlocuiește prin $Y = (x_1, x_2 + x_3, -x_3, x_4 + x_3, x_5)$, obținem $f(Y) - f(X) = (x_2 + x_3 - x_5)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 + x_5)^2 + (x_1 - x_3 - x_4)^2 - (x_2 - x_5)^2 - (x_3 - x_1)^2 - (x_4 - x_2)^2 - (x_5 - x_3)^2 - (x_1 - x_4)^2 = 2x_3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) < 0$.

Deci valorile funcției f asociate procesului descris constituie un șir strict descrescător de întregi nenegativi. Orice astfel de șir este neapărat finit, deci procesul are un număr finit de pași.

Dacă se consideră mai multe virfuri sau numere reale în loc de numere întregi problema devine mult mai dificilă.

O altă funcție cu aceleași proprietăți din punct de vedere al rezolvării problemei a fost considerată de *Grindeanu Iulian* și anume:

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + \sum_{i=1}^{5} (x_i + x_{i+1})^2, \text{ unde } x_6 = x_1.$$

4. Fie E, F, G trei virfuri consecutive ale poligonului și să presupunem că Y se găsește pe latura EF iar Z pe latura FG. Deoarece $m(\widehat{YFZ}) + m(\widehat{YXZ}) = 2m(\widehat{ABO}) + m(\widehat{AOB}) = 180°$, patrulaterul $YFZX$ este inscriptibil. Rezultă că $m(\widehat{YFX}) = m(\widehat{XZX}) = m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{YFO})$, deci X se găsește pe dreapta OF. Atunci cînd Y se deplasează pe EF și Z pe FG virful X se plasează pe OF și descrie un segment de dreaptă a cărui lungime este distanța de la X la centrul O cînd Y și Z sînt egal depărtate de virful F. Se calculează ușor că această lungime este egală cu $b_n = \dfrac{a\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{n}\right)}{\sin\dfrac{2\pi}{n}}$, unde a este lungimea laturii poligonului și se demonstrează imediat că orice punct de pe acest segment aparține locului geometric.

Deci locul geometric al lui X cînd Y parcurge conturul poligonal este un asterix care este compus din n segmente de dreaptă de lungime b_n care pleacă din O de-a lungul drepteloor care unesc pe O cu virfurie poligonului, în direcție opusă virfurilor.

5. Dacă $w > 2$ substituind în a) $x = w - 2$, $y = 2$ obținem $0 = f((w-2)f(2))f(2) = f(w)$, deci $f(x) = 0$ dacă și numai dacă $x \geqslant 2$. Fie $0 \leqslant y < 2$ și $x \geqslant 0$. Atunci membrul stîng al egalității a) este 0 dacă și numai dacă $xf(y) \geqslant 2$, iar membrul drept este nul dacă și numai dacă $x + y \geqslant 2$. Deci pentru $0 \leqslant y < 2$ și $x \geqslant 0$ condiția $xf(y) \geqslant 2$ este echivalentă cu $x + y \geqslant 2$

Scanned with OKEN Scanner

sau $x \geqslant \dfrac{2}{f(y)}$ dacă și numai dacă $x \geqslant 2-y$. Rezultă că $\dfrac{2}{f(y)} = 2-y$ și deci $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$, pentru $0 \leqslant x < 2$; $f(x) = 0$ pentru $x \geqslant 2$. Această funcție f satisface evident condițiile b) și c). Pentru a arăta că f satisface a) vom considera mai multe cazuri:

1°. $x + y < 2$ și $xf(y) < 2$. Deducem $0 \leqslant y < 2$ și $f(y) = \dfrac{2}{2-y}$, $f(xf(y)) = \dfrac{2}{2-xf(y)} =$

$= \dfrac{2-y}{2-x-y}$, deci $f(xf(y))f(y) = \dfrac{2-y}{2-x-y} \cdot \dfrac{2}{2-y} = \dfrac{2}{2-x-y} = f(x+y)$.

2° $x + y \geqslant 2$ și $xf(y) \geqslant 2$. În acest caz ambii membri din a) sînt egali cu zero.

3°. $x + y \geqslant 2$ și $xf(y) < 2$. Obținem fie că $y \geqslant 2$ și ambii membri sînt zero sau $0 \leqslant y < 2$ și $x \cdot \dfrac{2}{2-y} < 2$, deci $x + y < 2$, ceea ce contrazice ipoteza.

4°. $x + y < 2$ și $xf(y) \geqslant 2$. Rezultă $f(y) \geqslant \dfrac{2}{x}$, deci $0 \leqslant y < 2$ și $x \cdot \dfrac{2}{2-y} \geqslant 2$, adică $x+y \geqslant 2$, ceea ce contrazice ipoteza.

6. O astfel de colorare este întotdeauna posibilă. Pentru a demonstra această proprietate să considerăm o dreaptă arbitrară L paralelă cu una din axele de coordonate și care are o intersecție nevidă cu mulțimea dată M. Fie $P_1, \ldots, P_r$ punctele din $M \cap L$ aranjate în ordinea crescătoare a coordonatei variabile. Unim prin cîte un segment de dreaptă P_1 și P_2, P_3 și P_4 ș.a.m.d. și efectuăm această operație pentru toate dreptele L. Se obține o familie de segmente, iar fiecare punct din M aparține la cel mult două segmente. Deci mulțimea acestor segmente se partiționează în linii poligonale, închise sau nu, fără vîrfuri din M comune. Liniile poligonale închise sînt compuse dintr-un număr par de segmente, deoarece oricare două segmente succesive sînt perpendiculare între ele. Vom colora vîrfurile fiecărei linii poligonale alternativ cu roșu și alb, ceea ce este întotdeauna posibil în virtutea observației anterioare privind paritatea ciclurilor. Punctele izolate din M, care nu aparțin nici unuia dintre segmentele formate anterior vor fi colorate într-un mod arbitrar cu roșu sau cu alb. Colorarea astfel obținută verifică condiția impusă în enunț deoarece pe orice dreaptă orizontală sau verticală punctele din M sînt unite două cîte două prin segmente avînd extremitățile de culori diferite. Dacă pe o dreaptă există un număr impar de puncte, culoarea punctului rămas (cel mai din dreapta sau cel mai de sus) nu are importanță.

7. Fie E punctul în care băiatul își schimbă direcția către vest și D punctul în care atinge marginea lacului. Dreapta DE intersectează pe AC în F și cercul circumscris al triunghiului ABC o mai intersectează o dată în G. AEF este un triunghi echilateral, deci $EF = AE = x$. Prin simetrie $FG = DE = y$. Deoarece $AE \cdot EB = DE \cdot FG$ rezultă $x(86-x) = y(x+y)$. Dacă x este impar atunci $x(86-x)$ este impar, în timp ce $y(x+y)$ este par. Deci x trebuie să fie par și rezultă că y este de asemenea par. Scriind $x = 2x_1$ și $y = 2y_1$ ecuația devine $x_1(43-x_1) = y_1(x_1+y_1)$. Să notăm $d = (x_1, y_1)$, $x_1 = dx_2$, $y_1 = dy_2$ și obținem:

$$x_2(43 - dx_2) = dy_2(x_2 + y_2), \tag{1}$$

Deoarece $(x_2, y_2) = 1$ rezultă din (1) că $x_2 \mid d$, adică $d = x_2 d_1$. Rezultă $43 - x_2^2 d_1 = y_2 d_1 (x_2 + y_2)$ sau $43 = (x_2^2 + x_2 y_2 + y_2^2) d_1$. Deoarece 43 este număr prim se deduce $43 = x_2^2 + x_2 y_2 + y_2^2$ și $x_2, y_2 > 0$. Deci $x_2 = 6$, $y_2 = 1$ și $x = 72$, $y = 12$ sau $x_2 = 1$, $y_2 = 6$ și $x = 2$, $y = 12$.

8. Să notăm $x = p^a x'$, $y = p^b y'$, $z = p^c z'$ unde p nu divide produsul $x'y'z'$ și $a \geqslant b \geqslant c$. Din relația dată rezultă că $p^n(x+y) = z(xy - p^n)$, deci $z' \mid x+y$ și mai avem $p^c \mid x+y$. Obținem că $z \mid x+y$, adică $x+y = qz$, (1), și relația dată devine $xy = p^n(q+1)$, (2). Evident orice soluție pentru (1) și (2) este o soluție a ecuației date în enunț.

Pentru $q = 1$ se obțin $n+1$ soluții:

$$x = 2p^i, \quad y = p^{n-i}, \quad z = 2p^i + p^{n-i}, \text{ pentru } i = 0, 1, \ldots, n, \tag{3}$$

Pentru $q = 2$ mai obținem $n+1$ soluții:

$$x = 3p^j, \quad y = p^{n-j}, \quad z = \frac{1}{2}(3p^j + p^{n-j}), \text{ pentru } j = 0, 1, \ldots, n, \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă n este impar soluțiile (3) și (4) sînt diferite două cîte două, dar dacă n este par soluțiile corespunzătoare lui $i=j=\frac{n}{2}$ diferă numai printr-o permutare.

O altă soluție este dată de

$$x=1,\ y=\frac{1}{2}p^n(p^n+3),\ z=p^n+2, \tag{5}$$

care diferă de (3) și (4) deoarece $p>3$, ceea ce rezolvă versiunea mai ușoară a problemei.

Un alt tip de soluții se obține pentru $q=p^k+p^{n-k}$. Se obțin soluțiile:

$$x=p^k,\ y=p^n+p^{n-k}+p^{2n-2k},\ z=p^{n-k}+1,\ \text{pentru } k=0,1,\ldots,n, \tag{6}$$

Pentru $k=n$, (6) produce aceleași soluții ca (3) pentru $i=0$. Pentru $k<n$ soluțiile (3), (4), (5), (6) sînt distincte.

Am găsit deci $3(n+1)$ soluții pentru n impar și $3(n+1)-1$ soluții pentru n par. Dar pentru n par mai există o soluție dată de $x=p,\ y=p^n+p^{n-1},\ z=p^{n-1}+p^{n-2}+1$.

9. Să notăm $P(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n+1})$. Rezultă că

$$P'(x)=\sum_{j=0}^{n+1}\frac{P(x)}{x-x_j}\quad\text{și}\quad P''(x)=\sum_{\substack{j,k=0\\ j\neq k}}^{n+1}\frac{P(x)}{(x-x_j)(x-x_k)},$$

deci

$$P''(x_i)=2P'(x_i)\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n+1}\frac{1}{x_i-x_j}\ \text{pentru } i=0,1,\ldots,n+1.$$

Condiția dată în enunț implică $P''(x_i)=0$ pentru $i=1,2,\ldots,n$, deci $x(x-1)P''(x)=(n+2)(n+1)P(x)$, (1), deoarece diferența celor doi membri este un polinom de grad cel mult $n+1$ cu $n+2$ rădăcini distincte $x_i(0\leqslant i\leqslant n+1)$. Există un polinom unic de grad $n+2$ cu coeficientul lui x^{n+2} egal cu 1 care satisface ecuația diferențială (1). Pe de altă parte, polinomul $Q(x)=(-1)^nP(1-x)=x^{n+2}+\ldots$ satisface de asemenea (1). Deci

$$P(x)=(-1)^nP(1-x)=(x-1)(x-(1-x_1))\ldots(x-(1-x_n)).$$

Deoarece $0<1-x_n<1-x_{n-1}<\ldots<1-x_1<1$ rezultă $x_{n+1-i}=1-x_i$ pentru $i=1,2,\ldots,n$.

10. Problema se poate reformula în termenii teoriei grafurilor astfel:

Fiind dat un graf cu n vîrfuri și q muchii numerotate cu numerele $1,\ldots,q$, să se arate că există un lanț format din m muchii $\left(m\geqslant\frac{2q}{n}\right)$, astfel încît oricare două muchii consecutive au un vîrf în comun, aranjate în ordinea crescătoare a numerotării.

Pentru orice vîrf v al grafului să notăm prin $L(v)$ lungimea (numărul de muchii) al celui mai lung lanț format din muchii adiacente două cîte două, care începe în v și sînt aranjate în ordine crescătoare. Este suficient să arătăm că $\sum_v L(v)\geqslant 2q$, deoarece atunci există v astfel încît $L(v)\geqslant\frac{2q}{n}$. Vom demonstra această proprietate prin inducție după q, mulțimea vîrfurilor fiind fixată. Pentru $q=1$ avem egalitate. Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru $q'\leqslant q-1$ muchii și să considerăm un graf G cu q muchii numerotate $1,\ldots,q$. Fie u și v extremitățile muchiei cu numărul 1. Suprimînd această muchie obținem un graf G' cu $q-1$ muchii. Fie $L'(v)$ funcția analoagă pentru graful G'. Este clar că au loc inegalitățile:

$$L(u)\geqslant L'(v)+1,\ L(v)\geqslant L'(u)+1,\ L(w)\geqslant L'(w)$$

pentru $w\neq u,v$. Însumînd aceste inegalități pentru toate vîrfurile și ținînd seama de ipoteza de inducție obținem:

$$\sum L(v)\geqslant\sum L'(v)+2\geqslant 2(q-1)+2=2q.$$

Scanned with OKEN Scanner

11. Mulțimea $X = \{1, \ldots, 1986\}$ se poate partiționa în 662 de triplete $T_1, \ldots, T_{662}$ fiecare dintre ele constînd din trei întregi consecutivi, adică $T_j = \{3j-2, 3j-1, 3j\}$, unde $j = 1, \ldots, 662$. Să notăm cu H familia submulțimilor cu k elemente ale lui X și fie G familia acelor mulțimi $P \in H$ care îndeplinesc condiția:

$$\text{există } j \text{ astfel încît } |P \cap T_j| = 1 \text{ sau } 2. \tag{1}$$

Să notăm că pentru orice $P \in H$ există $1 \leqslant j \leqslant 662$ astfel încît $|P \cap T_j| \in \{1, 2, 3\}$. Oricărei mulțimi $P \in G$ îi asociem o nouă mulțime $P' = f(P)$ din G în modul următor: Fie j cel mai mic întreg pentru care are loc (1). Dacă $|P \cap T_j| = 1$, vom înlocui unicul element din $P \cap T_j$ prin următorul element (în ordine ciclică) din același triplet T_j; dacă însă $|P \cap T_j| = 2$ vom deplasa cele două elemente din $P \cap T_j$ cu cîte un pas la stînga, de asemenea ciclic în cadrul tripletului T_j, iar restul elementelor din P rămîn neschimbate. Să notăm cu $s(P)$ suma numerelor din mulțimea P. Este clar că $s(P') = s(P) + 1 \pmod 3$. De asemenea $f(f(f(P))) = P$. Deci familia G se partiționează prin operația $P \to f(P)$ în trei submulțimi de cardinalități egale, $G = G_0 \cup G_1 \cup G_2$, unde $s(P) = i \pmod 3$ pentru $P \in G_i$. Într-adevăr, f este injectivă, deci

$$|G_0| \leqslant |G_1| \leqslant |G_2| \leqslant |G_0|, \text{ deci } |G_0| = |G_1| = |G_2|.$$

Dacă numărul k nu este divizibil prin 3, relația (1) este satisfăcută pentru fiecare $P \in H$, deci $H = G$ și existența partiției lui H cu proprietățile menționate ne arată că jocul este echitabil. Dacă numărul k este divizibil cu 3, atunci există mulțimi în H care nu satisfac (1), deci pentru care $|P \cap T_j| = 0$ sau 3 pentru orice j. Orice mulțime $P \in H \setminus G$ este reuniunea unui anumit număr de triplete T_j astfel încît $s(P) = 0 \pmod 3$. Deci în acest caz submulțimile cu k elemente ale lui X care au suma elementelor multiplu de 3 sînt mai numeroase și jucătorul A este avantajat.

Un caz particular al acestei probleme, pentru care tripletul (1986, k, 3) a fost înlocuit prin (100, 2, 2) a fost publicat în revista „Matematikai Lapok" nr. 10 (1985).

12. Soluția problemei este $f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x. Fie X o mulțime finită de puncte în plan care verifică proprietățile din enunț și L_k o dreaptă care conține exact k puncte din $X (k = 1, \ldots, n)$. Deci L_n conține n puncte; L_{n-1} conține $n-1$ puncte și cel puțin $n-2$ dintre ele nu se găsesc pe L_n; L_{n-2} conține $n-2$ puncte și cel puțin $n-4$ dintre ele nu se găsesc pe L_n sau L_{n-1} etc. Deci

$$|X| \geqslant n + (n-2) + (n-4) + \ldots + \left(n - 2\left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Să notăm suma din membrul drept al acestei inegalități prin $g(n)$. Deci $f(n) \geqslant g(n)$.

Pentru a demonstra inegalitatea contrară, trebuie să arătăm că există, pentru orice n, o mulțime X_n de cardinal $g(n)$, care satisface condiția din enunțul problemei. Existența unei astfe de mulțimi X_n se dovedește prin inducție după n. Pentru $n = 1$ și $n = 2$ orice mulțime formată dintr-un punct, respectiv din două puncte verifică proprietățile cerute. Să presupunem că X_n este o mulțime cu $g(n)$ puncte și există dreptele L_k, $k = 1, \ldots, n$ astfel încît $|L_k \cap X_n| = k$ pentru $k = 1, \ldots, n$. Există o dreaptă L care nu este paralelă cu nici una dintre dreptele L_k și care nu trece prin nici un punct din X_n și prin nici un punct de intersecție a dreptelor L_k. Să notăm cu P_k punctul de intersecție dintre L și $L_k (k = 1, \ldots, n)$ și să considerăm punctele P_{n+1} și P_{n+2} pe L, diferite de $P_1, \ldots, P_n$. Adăugînd punctele $P_1, \ldots, P_{n+2}$ la X_n obținem o mulțime X_{n+2} de cardinal $g(n) + (n+2) = g(n+2)$. Pentru $k = 1, \ldots, n$ dreapta L_k intersectează pe X_{n+2} în $k+1$ puncte; dreapta L intersectează pe X_{n+2} în $n+2$ puncte și putem găsi o dreaptă care are un singur punct în comun cu X_{n+2}. Deci pentru orice $n \geqslant 1$ există o mulțime X_n cu proprietățile cerute, ceea ce implică $f(n) = g(n)$ pentru orice $n \geqslant 1$. Se poate arăta ușor că $g(n)$ are expresia menționată, de exemplu prin inducție după n.

13. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Dreapta AI intersectează pe EF în X și $m(\widehat{IFA}) = m(\widehat{FXA}) = 90°$. Deci triunghiurile AFI și FXI sînt asemenea, de unde $IX \cdot IA = IF^2 = r^2$. Analog mai obținem $IY \cdot IB = IZ \cdot IC = r^2$, deci cercurile XYZ și ABC se corespund printr-o inversiune de pol I și modul r^2. Rezultă că centrele acestor cercuri și punctul I sînt coliniare.

14. a) Deoarece $ABCD$ nu este inscriptibil, punctele A', B', C', D' sînt distincte două cîte două. Avem $A'B' \perp CD$, $A'C' \perp BD$, $B'C' \perp AD$ etc., C' și D' se găsesc pe mediatoarea segmentului $[AB]$, iar B' și C' pe mediatoarea segmentului $[AD]$. Deoarece $ABCD$ este convex,

Scanned with OKEN Scanner

diagonalele AC și BD au un punct comun, iar pentru că $B'D' \perp AC$ punctele B' și D' nu se pot găsi de aceeași parte a dreptei AC'. Rezultă $m(\widehat{B'C'D'}) = 180° - m(\widehat{DAB})$. Se obține în mod analog $m(\hat{A'}) = 180° - m(\hat{C})$, $m(\hat{B'}) = 180° - m(\hat{D})$, $m(\hat{D'}) = 180° - m(\hat{B})$. Deci $A'B'C'D'$ este convex și nu este inscriptibil ($m(\hat{A'}) + m(\hat{C'}) = m(\hat{B}) + m(\hat{D})$ și $m(\hat{B'}) + m(\hat{D'}) = m(\hat{A}) + m(\hat{C})$). Rezultă că A'', B'', C'' și D'' sînt patru puncte distincte. Deoarece $A''B'' \perp C'D'$, $A''C'' \perp B'D'$, etc. rezultă că $A''B'' \| AB$, $A''C'' \| AC$, $B''C'' \| BC$ și deci triunghiul $A''B''C''$ este asemenea cu ABC. La fel se obține că $A''D''C''$ și ADC sînt asemenea, deci $ABCD$ și $A''B''C''D''$ sînt asemenea.

b) Dacă S este intersecția dreptelor AC și $B'D'$ putem scrie:

$$B'S = \frac{AC\cos D}{2\sin D},\quad D'S = \frac{AC\cos B}{2\sin B},\quad B'D' = \frac{AC\sin(B+D)}{2\sin B\sin D}.$$

Aceste relații sînt adevărate de asemenea cînd $\hat{B}$ sau $\hat{D}$ sînt mai mari cu 180°. Analog

$$A''C'' = \frac{B'D'\sin(A'+C')}{2\sin A\sin D},\quad \text{deci}\quad \frac{A''C''}{AC} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin(A+C)\sin(B+D)}{\sin A\sin B\sin C\sin D}.$$

15. Dacă notăm lungimile laturilor triunghiului ABC prin a, b, c și distanțele DA, DB, DC prin R_1, R_2, R_3 vom arăta mai întîi că patrulaterul $DYAZ$ este circumscriptibil dacă și numai dacă $R_2 - R_3 = c - b$.

Să presupunem că $DYAZ$ este circumscriptibil unui cerc și să notăm punctele de tangență ale laturilor DY, YA, AZ, ZD cu cercul prin P, Q, R, respectiv S. Obținem $R_2 - R_3 = BP - CS = BR - CQ = c - b$ deoarece $DP = DS$ și $AR = AQ$.

Fie acum $R_2 - R_3 = c - b$ și să notăm cu P, R, S punctele de tangență cu laturile BD, BZ și ZD ale cercului exînscris C_B în triunghiul BZD relativ la vîrful B. Să construim punctul Q astfel încît $CQ = CS$. Printr-un raționament analog se deduce $AR = AQ$; deci R, S, Q sînt punctele de tangență cu laturile ale cercului înscris în triunghiul AZC. Deoarece C_B este tangent în R și S laturilor AZ și ZC rezultă că C_B este cercul înscris în triunghiul AZC și deci AC este tangentă lui C_B. Rezultă că $DYAZ$ este circumscris cercului C_B.

Să presupunem acum că $DZBX$ și $DXCY$ sînt circumscriptibile. Rezultă că $R_1 - R_3 = c - a$, $R_2 - R_1 = a - b$, ceea ce implică $R_2 - R_3 = c - b$ și deci $DYAZ$ este circumscriptibil.

16. Să notăm $m = AB$ și $n = CD$, deci $mn = c^2$. Fie M, N mijloacele segmentelor $[AB]$ și $[CD]$. Din congruența triunghiurilor ABD și BCA, respectiv CAD și BCD rezultă $MC = MD$ și $AN = BN$. Dar MN este mediana comună a triunghiurilor ABN și CDM, deci MN este perpendiculara comună a dreptelor AB și CD, ceea ce implică faptul că punctele A și B respectiv C și D sînt două cîte două simetrice față de MN.

Dacă P este un punct din spațiu și $\bar{P}$ simetricul său față de MN avem

$$A\bar{P} = BP \text{ și } C\bar{P} = DP, \text{ deci } f(P) = AP + A\bar{P} + CP + C\bar{P}.$$

Dacă se notează cu Q intersecția dreptelor $P\bar{P}$ și MN, rezultă că AQ este mediană în triunghiul $AP\bar{P}$ și CQ este mediană în triunghiul $CP\bar{P}$. Putem scrie:

$$2AQ \leqslant AP + A\bar{P} \text{ și } 2CQ \leqslant CP + C\bar{P}, \text{ deci } f(Q) = 2(AQ + CQ) \leqslant f(P).$$

Vom roti segmentul $[AB]$ în jurul dreptei MN pentru a obține un segment $[\bar{A}\bar{B}]$ care se află în planul CDM. Deoarece MN este o axă de simetrie pentru $[AB]$ obținem $\bar{A}Q = AQ$ pentru orice punct Q pe MN. Dreptele $A\bar{B}$ și MN sînt perpendiculare, deci $A\bar{B}$ și CD sînt perpendiculare pe MN, de unde se deduce că $A\bar{B}CD$ este un trapez isoscel. Avem $f(Q) = 2(\bar{A}Q + CQ)$, dar $\bar{A}Q + CQ \geqslant \bar{A}C$, de unde $2\bar{A}C \leqslant f(Q) \leqslant f(P)$, adică $\min f(P) = 2\bar{A}C$. În triunghiul ABN deducem $4MN^2 = 4AN^2 - AB^2$ și în triunghiul DAC, deducem $4AN^2 = 2(a^2 + b^2) - n^2$, de unde $4MN^2 = 2(a^2 + b^2) - m^2 - n^2$. Teorema lui *Ptolemeu* aplicată în trapezul isoscel $A\bar{B}CD$ ne conduce la

$$\bar{A}C^2 = A\bar{B}\cdot CD + B\bar{C}^2 = mn + MN^2 + \frac{1}{4}(A\bar{B} - CD)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + mn),$$

adică

$$\bar{A}C = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Se obține

$$\min f(P) = 2\bar{A}C = \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

17. Se rotesc feţele ABD, ABC, ACD în jurul dreptelor BD, BC şi respectiv CD pînă cînd vîrful A ajunge în planul BCD, ocupînd poziţiile A', A'' şi respectiv A'''. Obţinem $A'B = BA''$, $A''C = CA'''$ şi $A'''D = DA'$.

a) Necesitatea condiţiei: Dacă suma măsurilor celor trei unghiuri din fiecare vîrf al tetraedrului este $180°$, A', B, A''; A'', C, A''' şi A''', D, A' sînt respectiv coliniare. Deci B, C, D sînt respectiv mijloacele laturilor triunghiului $A'A''A'''$, ceea ce implică faptul că feţele tetraedrului sînt congruente.

b) Suficienţa condiţiei: Dacă cele patru feţe sînt triunghiuri congruente, se obţine $BD = A''C = CA'''$, $BC = A'D = DA'''$ şi $CD = A'B = BA''$. În triunghiul $A''BC$ fie $m(\widehat{A''CB}) = \alpha$, $m(\widehat{CBA''}) = \beta$ şi $m(\widehat{BA''C}) = \gamma$. Din cauza congruenţei triunghiurilor mai putem scrie $m(\widehat{BCD}) = \beta$ şi $m(\widehat{DCA'''}) = \gamma$ astfel încît suma măsurilor unghiurilor cu vîrful în C este $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. În mod asemănător se arată că aceeaşi proprietate are loc şi pentru vîrfurile A, B şi D.

18. Vom arăta mai întîi că pentru orice triunghi are loc inegalitatea $2p \geqslant 6\sqrt{3}$. Într-adevăr, $S = pr = (pA^3)^{1/2}$, unde $A = ((p-a)(p-b)(p-c))^{1/3}$. Inegalitatea dintre mediile aritmetică şi geometrică ne conduce la $A \leqslant \frac{p}{3}$ şi deci $r \leqslant \frac{p}{3\sqrt{3}} = \frac{2p}{6\sqrt{3}}$. Notînd perimetrele feţelor cu $2p_A$, $2p_B$, $2p_C$, şi $2p_D$ se deduce $\sum r_A \leqslant \frac{2}{6\sqrt{3}} \sum p_A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ şi egalitatea are loc cînd fiecare faţă este un triunghi echilateral, deci atunci cînd $ABCD$ este un tetraedru regulat.

SOLUŢIILE PROBLEMELOR DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTELE POLITEHNICE, SESIUNEA SPECIALĂ IUNIE 1986, PENTRU ELEVII DIN ECHIPA OLIMPICĂ 1986

prezentate de D. M. Bătineţu-Giurgiu, D. Costeseu şi Valentin Tudose

I. ENUNŢURI

A. Algebră şi analiză matematică

1. Să se demonstreze că numărul $(10^{n+1} + 18n + 17)(9^{n+1} - 8n - 9)$ este divizibil cu 432 oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ aşa încît polinomul $P = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + mX + 1$ să fie divizibil cu polinomul $X - i$ şi apoi să se determine rădăcinile polinomului P.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Să se arate că A este soluţie a ecuaţiei matriciale $X^2 - 2X + I_2 = O_2$. Fie $\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid B = aA + bI_2;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că $(\mathcal{M}_A, +, \cdot)$ este un inel. Să se arate apoi că există a_n, $b_n \in \mathbb{Z}$ aşa încît $A^n = a_n A + b_n I_2$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi să se determine a_n şi b_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Dacă $a \in (1, \infty)$, să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(a^{\frac{n}{1}} + a^{\frac{n}{2}} + \ldots + a^{\frac{n}{n}}\right)$.

5. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1}, & x \in \mathbb{R}_- \\ x \ln x, & x \in (0, 1) \\ e^{-x} + e^{-1}, & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

şi apoi să se traseze graficul funcţiei f.

Scanned with OKEN Scanner

B. Geometrie și trigonometrie

1. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și fie AD înălțimea din A a triunghiului. Fie $F \in (AD)$. Se construiește perpendiculara în F pe CF care taie pe AB în E. Paralela din A la EF intersectează pe BC în H. Să se demonstreze că patrulaterul $AHFE$ este paralelogram.

2. Se consideră în plan trei puncte coliniare fixe A, O, B cu $O \in (AB)$. Se consideră o semidreaptă variabilă cu originea în O pe care se iau punctele M și N așa încît $(OM) \equiv (OA)$ și $(ON) \equiv (OB)$. Să se determine locul geometric al intersecției dreptelor AM și BN.

3. Să se rezolve ecuația trigonometrică :

$$(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right).$$

4. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC avem egalitatea $8\cos A \cos B \cos C =$ dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

5. Fie $[ABCDA'B'C'D']$ un cub. Se secționează cubul prin planul determinat de punctul A, mijlocul muchiei $[BC]$ și centrul feței $[DCC'D']$. Să se determine raportul volumelor celor două corpuri rezultate prin secționarea cubului.

II. SOLUȚII

A. Algebră și analiză matematică

1. *Soluția* I. Este evident că $2^4 \cdot 3^3 = 432$ și că 2^4 este prim cu 3^3. Fie $A_n = 10^{n+1} + 18n + 17$ și $B_n = 9^{n+1} - 8n - 9$. Dacă vom arăta că 2^4 divide B_n și 3^3 divide A_n problema este rezolvată.

Într-adevăr, $A_n = 10^{n+1} - 1 + 18n + 18 = 9(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1) + 18(n+1) = 9(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 1 + 2n + 2) = 27 + 9(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10^2 + 10 + 2n) = 27 + 9(10^n + 2 + 10^{n-1} + 2 + \ldots + 10^2 + 2 + 10 + 2) =$ multiplu de 27, deoarece $10^k + 2 = (9+1)^k + 2$ este multiplu de 3 oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$.

De asemenea avem : $B_n = 9^{n+1} - 1 - 8n - 8 = 8(9^n + 9^{n-1} + \ldots + 9 + 1 - n - 1) = 8(9^n - 1 + 9^{n-1} - 1 + \ldots + 9^2 - 1 + 9 - 1) =$ multiplu de 2^4, deoarece $9^k - 1 = (8+1)^k - 1$ este multiplu de 8 oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$.

Soluția a II-a. Prin inducție matematică arătăm că 2^4 divide B_n și 3^3 divide A_n, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

Într-adevăr, dacă $n = 0$ datunci $M_0 = A_0 B_0 = 0$ se divide cu 432. Dacă $n = 1$ atunci $M_1 = A_1 B_1 = 135 \cdot 64 = \mathcal{M}432$ deci se divide cu 432.

Presupunem că $\mathcal{M}_n$ se divide cu 432 adică A_n se divide cu 27 și B_n se divide cu 64.

Să demonstrăm că M_{n+1} se divide cu 432 adică A_{n+1} se divide cu 27 și B_{n+1} se divide cu 64. Într-adevăr, $M_{n+1} = A_{n+1} B_{n+1} = (10^{n+2} + 18(n+1) + 17)(9^{n+2} - 8(n+1) - 9) = (10^{n+2} - 10^{n+1} + 18 + 10^{n+1} + 18n + 17) \cdot (9^{n+2} - 9^{n+1} - 8 + 9^{n+1} - 8n - 9) = (10^{n+2} - 10^{n+1} + 18 + A_n)(9^{n+2} - 9^{n+1} - 8 + B_n) = ((10^{n+1} + 2)9 + A_n)((9^{n+1} - 1)8 + B_n) = 9 \cdot 8 \cdot (10^{n+1} + 2)(9^{n+1} - 1) + 9(10^{n+1} + 2)B_n + 8(9^{n+1} - 1)A_n + A_n B_n$ de unde dacă ținem seama de ipoteza de inducție și de faptul că $10^{n+1} + 2$ se divide cu 3 iar $9^{n+1} - 1$ se divide cu 8 rezultă că M_{n+1} se divide cu 432. Cu aceasta problema este rezolvată.

2. Deoarece $P \in \mathbf{R}[X]$, $Q = X - i \in \mathbf{C}[X]$ și Q divide P rezultă că și $S = X + i$ divide P adică $X^2 + 1$ divide P ceea ce este tot una cu a spune că $-i$ și i sînt rădăcini ale lui P. Scriind că i este rădăcină a lui P deducem că $m = 1$ ceea ce arată că P este un polinom reciproc de gradul 6. Citul împărțirii lui P la $X^2 + 1$ este polinomul reciproc de gradul patru $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 = (X^2 + 1)^2 + X(X^2 + 1) = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$. Deci rădăcinile polinomului P sînt $x_1 = x_2 = i$, $x_3 = x_4 = -i$, $x_5 = \varepsilon_1$, $x_6 = \varepsilon_2$, unde ε_1, ε_2 sînt rădăcinile cubice complexe și nereale ale lui 1.

3. Se verifică ușor că A satisface ecuația din enunț. De asemenea se verifică destul de ușor că $\mathcal{M}_A$ este stabilă față de adunarea și înmulțirea matricelor. Nu este cazul să mai verificăm asociativitatea adunării și înmulțirii matricelor din $\mathcal{M}_A$ deoarece restricția unei operații asociative la o submulțime stabilă (în general) este asociativă. Este evident că $O_2, I_2 \in \mathcal{M}_A$. De asemenea, dacă $B \in \mathcal{M}_A$ se vede imediat că $-B \in \mathcal{M}_A$ și $B + C = C + B$, $(\forall) B, C \in \mathcal{M}_A$. Deoarece înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ este distributivă (la stînga și la dreapta) față de adunarea matricelor rezultă că și înmulțirea din $\mathcal{M}_A$ este distributivă față de adunarea din $\mathcal{M}_A$. Cu aceasta am arătat că $(\mathcal{M}_A, +, \cdot)$ este inel. Este evident că $A = A + 0 \cdot I_2 = a_1 A + b_1 I_2$ unde $a_1 = 1$ și $b_1 = 0$. Datorită faptului că A verifică ecuația matricială din enunț deducem că $a_2 = 2$ și $b_2 = -1$. Presupunem că $A^n = a_n A + b_n I_2$ atunci $A^{n+1} = A \cdot A^n = A(a_n A + b_n I_2) = a_n A^2 + b_n A = a_n(2A - I_2) + b_n A = (2a_n + b_n)A - a_n I_2 = a_{n+1} A + b_{n+1} I_2$ de unde deducem că $a_{n+1} = 2a_n + b_n$, $b_{n+1} = -a_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$ și din modul de construcție rezultă $a_n, b_n \in Z$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Avem deci, $a_{n+1} = 2a_n + b_n$, $b_n = -a_n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, de unde deducem $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Ecuația caracteristică a recurenței liniare de ordinul doi cu coeficienți constanți pe care o verifică a_n este $r^2 - 2r + 1 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = r_2 = 1$ ceea ce arată că $a_n = \alpha n + \beta$ iar din $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ deducem $\alpha = 1$, $\beta = 0$ adică $a_n = n$ și $b_n = -a_{n-1} = -(n-1) = 1 - n$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Fie x_n termenul general al şirului a cărei limită se cere, adică

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(a^{\frac{n}{1}} + a^{\frac{n}{2}} + \ldots + a^{\frac{n}{n}}\right),\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Deoarece $a^{\frac{n}{k}} \leqslant a^n$, $(\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ rezultă că

$$x_n < \frac{1}{n} \cdot \ln(n \cdot a^n) = \frac{\ln n}{n} + \ln a, \qquad (1).$$

Totodată, $a^{\frac{n}{1}} + a^{\frac{n}{2}} + \ldots + a^{\frac{n}{n}} > a^n$. $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ de unde deducem că:

$$\ln\left(a^{\frac{n}{1}} + a^{\frac{n}{2}} + \ldots + a^{\frac{n}{n}}\right) > n \cdot \ln a \Rightarrow x_n > \ln a,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*, \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$\ln a < x_n < \frac{\ln n}{n} + \ln a,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

de unde prin trecere la limită cu $n \to \infty$ şi ţinînd seama că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ln a$.

5. Este evident că f este continuă şi derivabilă pe $\mathbf{R}^* - \{1\}$ şi de aceea vom studia continuitatea şi derivabilitatea numai în punctele 0 şi 1. Avem:

$$l_s(f, 0) = 0,\ l_d(f, 0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x \cdot \ln x) = \lim_{y\to\infty} \left(\frac{1}{y} \cdot \ln y^{-1}\right) = -\lim_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y} = 0.$$

Deci $l_s(f, 0) = l_d(f, 0) = f(0)$ ceea ce arată că f este continuă şi în $x = 0$. De asemenea avem:

$$l_s(f, 1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x \cdot \ln x) = 0,\ l_d(f, 1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 0 = f(1)$$

şi deci f este continuă şi în $x = 1$.

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x(x-1)^{-1}}{x} = -1,\ f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x \ln x}{x} = -\infty$$

ceea ce arată că f nu este derivabilă în $x = 0$.

$$f'_s(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x \ln x}{x-1} = -\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\ln x}{1-x} = -\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{e^{-x} - e^{-1}}{x-1} = e^{-1} \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{e^{1-x} - 1}{x-1} = -e^{-1} \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{e^{1-x} - 1}{1-x} =$$

$$= -e^{-1} \cdot \lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}} \frac{e^y - 1}{y} = -e^{-1}.$$

Deci f nu este derivabilă în $x = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

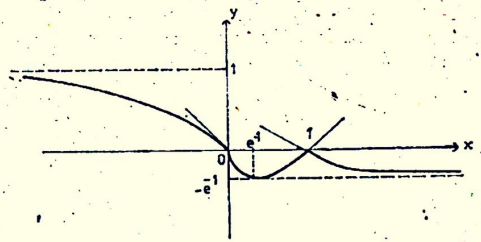
Prin urmare avem $f', f'': \mathbb{R}^* - \{1\} \to \mathbb{R}$ unde:

$$f'(x) = \begin{cases} -(x-1)^{-2}, & x \in \mathbb{R}^*_- \\ 1 + \ln x, & x \in (0, 1), \\ -e^{-x}, & x \in (1, \infty) \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 2(x-1)^{-3}, & x \in \mathbb{R}^*_- \\ x^{-1}, & x \in (0, 1). \\ e^{-x}, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Totodată avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -e^{-1}$, adică dreapta $y = -e^{-1}$ este asimptotă orizontală la ramura spre $+\infty$ a graficului și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, adică dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală la ramura spre $-\infty$ a graficului lui f. Punctele de intersecție ale graficului lui f cu axele de coordonate sînt $A(0, 0)$ și $B(1, 0)$. Derivata întîi se anulează în punctul $x_0 = e^{-1}$. Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - - -$	-1	$-\infty - - -$	0	$+ + +$	1	$-e^{-1} - - -$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	e^{-1}	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$
$f''(x)$		$- - - -$		$+ +$	$+ + +$			$+ + + +$	
$f(x)$		$\frown$			$\smile$			$\smile$	

Iar graficul este cel din figură.



B. Geometrie și trigonometrie

1. Deoarece $CF \perp EF$ și $EF \parallel AH$ rezultă că $CF \perp AH$. Din $CF \perp AH$ și $AD \perp BC$ deducem că F este ortocentrul triunghiului AHC și atunci din acest triunghi rezultă că $HF \perp AC$. Din $HF \perp AC$ și $AB \perp AC$ rezultă $AB \parallel HF$ de unde deducem că $HF \parallel AE$. Deoarece $AE \parallel HF$ și $AH \parallel EF$ rezultă că $AHFE$ este paralelogram.

Observație. Problema admite și o reciprocă: Fie ABC un triunghi în care unghiurile $\hat{B}$ și $\hat{C}$ nu sînt obtuze și AD înălțimea din A a triunghiului. Dacă există $F \in (AD)$ așa încît perpendiculara în F pe CF taie pe AB în E iar paralela la EF taie pe BC în H așa încît $AHFE$ este paralelogram atunci triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Într-adevăr, deoarece $CF \perp EF$ și $AH \parallel EF$ rezultă că F este ortocentrul triunghiului AHC și deci $HF \perp AC$. Deoarece $HF \parallel AE$ ($AHFE$ paralelogram) rezultă $AB \parallel HF$ și cum $HF \perp AC$ rezultă $AB \perp AC$ ceea ce demonstrează afirmația observației.

2. Fie $[OS$ semidreapta variabilă. Notăm cu $P = AM \cap BN$ și fie Q intersecția paralelei din P la OM cu segmentul (AB). Dacă O este mijlocul lui $[AB]$, atunci locul geometric cerut este un cerc cu centrul O și de rază $r = \frac{1}{2} AB$. Presupunem acum că O nu este mijlocul lui $[AB]$, notăm $OA = a$, $OB = b$ și deci rezultă că $MN = |b-a|$. Aplicînd teorema *Menelaus* în triunghiul NOB tăiat de transversala AP rezultă:

$$\frac{AO}{AB} \cdot \frac{BP}{PN} \cdot \frac{MN}{MO} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} \cdot \frac{BP}{PN} \cdot \frac{|b-a|}{a} = 1 \Rightarrow \frac{PB}{PN} = \frac{a+b}{|b-a|} = k \text{ (constant)}.$$

Deoarece $\frac{BP}{PN}$ este constant deducem că și $\frac{BQ}{OQ} = k$. Într-adevăr din triunghiul BNO, ținînd seama că $QP \parallel ON$, rezultă

$$\frac{BP}{PN} = \frac{QP}{ON} = k \Rightarrow QP = k \cdot ON = k \cdot b = \frac{b(a+b)}{|b-a|}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece Q este un punct fix și PQ este constant rezultă că locul geometric al punctului P este cercul $\mathcal{C}(Q, r)$ unde $r = \frac{b(a+b)}{|b-a|}$.

3. $(\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)^2 - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) - \frac{5}{4} = 0$$

și deci notînd $t = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$ avem de rezolvat ecuația $4t^2 - t - 5 = 0$, $t \in [-1, 1]$, de unde deducem că $t = -1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} \in 2\pi Z + \pi \Leftrightarrow 2x \in 2\pi Z + \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow x \in \pi Z + \frac{7\pi}{12}$.

4. $8\cos A\cos B\cos C = 1 \Leftrightarrow 4\cos A(\cos(B+C) + \cos(B-C)) = 1 \Leftrightarrow 4\cos A\cos(B-C) - 4\cos^2 A - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 A - 4\cos A\cos(B-C) + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos A - \cos(B-C))^2 + 1 - \cos^2(B-C) = 0 \Leftrightarrow (2\cos A - \cos(B-C))^2 + \sin^2(B-C) = 0 \Leftrightarrow \sin(B-C) = 0$ și $2\cos A - \cos(B-C) = 0 \Leftrightarrow B = C$ și $\cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}$ și $B = C = \frac{\pi}{3}$ adică triunghiul este echilateral.

Reciproca este imediată.

5. Fie O centrul feței $[DCC'D']$ și M mijlocul muchiei $[BC]$. Planul de secțiune (OMA) intersectează muchiile $[CC']$ și $[DD']$ respectiv în P și Q iar dreapta CD în N așa încît $C \in (DN)$. Prin această secționare rezultă trunchiul de piramidă triunghiulară cu bazele $[MCP]$ și $[ADQ]$. Să notăm cu a lungimea muchiei cubului. Avem:

$$\frac{CN}{ND} = \frac{CM}{AD} = \frac{CP}{DQ} = \frac{MP}{AQ} = \frac{1}{2} \text{ și deci } CN = a.$$

Să mai notăm $R = \mathrm{pr}_{DC}O$. Atunci $OR = \frac{1}{2}a$ și $NR = \frac{3}{2}a$. Pe bază de triunghiuri asemenea deducem că $CP = \frac{1}{3}a$ și $DQ = \frac{2}{3}a$ și atunci $\sigma[MCP] = \frac{a^2}{12}$ iar $\sigma[ADQ] = \frac{a^2}{3}$. Prin urmare volumul trunchiului $[ADQMCP]$ este

$$v_1 = \frac{a}{3}\left(\sigma[ADQ] + \sigma[MCP] + \sqrt{\sigma[ADQ]\cdot\sigma[MCP]}\right) =$$

$$= \frac{a}{3}\left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{6}\right) = \frac{7a^3}{36}.$$

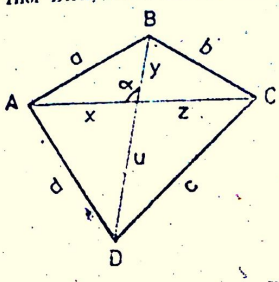
Volumul celuilalt corp rezultat prin secționarea cubului este $v_2 = v - v_1$ unde v este volumul cubului. Deoarece $v = a^3$ rezultă că $v_2 = \frac{29a^3}{36}$ și deci $\frac{v_1}{v_2} = \frac{7}{29}$.

Scanned with OKEN Scanner

CARACTERIZĂRI ALE PATRULATERELOR INSCRIPTIBILE

de Maria Elena Panaitopol, profesoară, București

Fie $ABCD$ un patrulater convex și R_a, R_b, R_c, R_d razele cercurilor circumscrise triunghiurilor BAD, ABC, BCD și respectiv ADC. Evident, dacă patrulaterul este inscriptibil, avem $R_a = R_b = R_c = R_d$. În cele ce urmează vom caracteriza patulaterele inscriptibile funcție de R_a, R_b, R_c, R_d.



Propoziția 1. *Dacă trei dintre razele R_a, R_b, R_c, R_d sînt egale atunci patrulaterul este inscriptibil.*

Demonstrație. Fără a restrînge generalitatea putem presupune $R_a = R_b = R_c$. Presupunem că patrulaterul nu este inscriptibil. Din $R_a = R_b$, utilizînd teorema sinusurilor, rezultă $\dfrac{AB}{\sin\widehat{ADB}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{ACB}}$ și deci $\sin\widehat{ADB} = \sin\widehat{ACB}$ și deci

$$m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{ACB}) = \pi. \tag{1}$$

Din $R_b = R_c$ rezultă $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{BC}{\sin\widehat{BDC}}$ și deci $\sin\widehat{BAC} = \sin\widehat{BDC}$ adică

$$m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BDC}) = \pi, \tag{2}$$

Din însumarea relațiior (1) și (2) rezultă $m(\hat{D}) + \pi - m(\hat{B}) = 2\pi$ și deci $m(\hat{B}) + m(\hat{D}) = \pi$ ceea ce contrazice presupunerea că patrulaterul nu este inscriptibil.

Propoziția 2. *Dacă $R_a = R_b$ și $R_c = R_d$ patrulaterul este inscriptibil.*

Demonstrație. Presupunem că patrulaterul nu este inscriptibil. Fie $\{O\} = AC \cap BD$. S-a arătat că din $R_a = R_b$ rezultă (1). Analog din $R_c = R_d$ rezultă

$$m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{DBC}) = \pi, \tag{3}$$

Însumînd relațiile (1) și (3) rezultă contradicția

$$2\pi - m(\widehat{BOC}) - m(\widehat{AOD}) = 2\pi.$$

Observație. În mod analog se arată că dacă $R_b = R_c$ și $R_a = R_d$ patrulaterul este inscriptibil.

Rezultatul principal al acestei note este dat de

Propoziția 3. *Fie $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcție strict monotonă. Dacă $f(R_a) + f(R_c) = f(R_b) + f(R_d)$ atunci patrulaterul este inscriptibil.*

Demonstrație. Unul din unghiurile $\widehat{AOB}$ sau $\widehat{AOD}$ nu este obtuz. Fie acesta $\widehat{AOB}$ adică $m(\widehat{AOB}) = \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Dacă $R_a = R_b$ relația devine $f(R_c) = f(R_d)$. Cum f este injectivă avem $R_c = R_d$ și din Propoziția 2 rezultă afirmația din concluzie. Notăm $OA = x$, $OB = y$. $OC = z$, $OD = u$, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ și $DA = d$. Cu notațiile cbișnuite într-un triunghi avem $bc = 2Rh_a$. Se obțin cu ușurință relațiile

$$R_a = \frac{ad}{2x\sin\alpha},\ R_b = \frac{ab}{2y\sin\alpha},\ R_c = \frac{bc}{2z\sin\alpha},\ R_d = \frac{dc}{2u\sin\alpha}.$$

Relația din enunț se scrie

$$f(R_a) - f(R_b) + f(R_c) - f(R_d) = 0$$

sau

$$\frac{f(R_a) - f(R_b)}{R_a^2 - R_b^2}\cdot(R_a^2 - R_b^2) + \frac{f(R_c) - f(R_d)}{R_c^2 - R_d^2}\cdot(R_c^2 - R_d^2) = 0, \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din teorema cosinusului avem:

$$b^2 = y^2 + z^2 + 2yz\cos x,\quad d^2 = x^2 + u^2 + 2xu\cos x,$$

$$R_a^2 - R_b^2 = \frac{a^2}{4\sin^2 x}\left(\frac{d^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2}\right) = \frac{a^2}{4\sin^2 x}\left(\frac{x^2+u^2+2xu\cos x}{x^2} - \frac{y^2+z^2+2yz\cos x}{y^2}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{4\sin^2 x}\left(\frac{u^2}{x^2} + 2\frac{u}{x}\cos x - \frac{z^2}{y^2} - 2\frac{z}{y}\cos x\right) =$$

$$= \frac{a}{4\sin^2 x}\left(\frac{u}{x} - \frac{z}{y}\right)\left(\frac{u}{x} + \frac{z}{y} + 2\cos x\right) = \frac{a(uy - xz)}{4xy\sin^2 x}\left(\frac{u}{x} + \frac{z}{y} + 2\cos x\right).$$

Analog $R_c^2 - R_d^2 = \frac{c^2(yu - xz)}{4zu\sin^2 x}\left(\frac{y}{z} + \frac{x}{u} + 2\cos x\right)$.

Relația (4) devine:

$$(yu - xz)\left[\frac{f(R_a) - f(R_b)}{R_a^2 - R_b^2}\cdot\frac{a^2}{xy}\left(\frac{u}{x} + \frac{z}{y} + 2\cos x\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{f(R_c) - f(R_d)}{R_c^2 - R_d^2}\cdot\frac{c^2}{zu}\left(\frac{y}{z} + \frac{x}{u} + 2\cos x\right)\right] = 0, \qquad (5).$$

Dacă f este strict crescătoare, $\frac{f(R_a) - f(R_b)}{R_a - R_b} > 0$ și $\frac{f(R_c) - f(R_d)}{R_c - R_d} > 0$ și cum $\cos x > 0$, din relația (5) rezultă numai $yu = xz$ și din reciproca puterii punctului rezultă că patrulaterul este inscriptibil.

Analog, dacă f este strict descrescătoare avem: $\frac{f(R_a) - f(R_b)}{R_a - R_b} < 0$ și $\frac{f(R_c) - f(R_d)}{R_c - R_d} < 0$, și din relația (5) rezultă numai $yu = zx$.

Observație. Considerînd $f(x) = x$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = \frac{1}{x}$ rezultă că fiecare din relațiile:

$$R_a + R_c = R_b + R_d;\ R_aR_c = R_bR_d;\ \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_d}$$

caracterizează patrulaterele inscriptibile.

UNELE INEGALITĂȚI DEDUSE DIN STUDIUL UNOR FUNCȚII

de Gh. Mileulescu, profesor, Tîrgoviște

În articolul de față vom prezenta unele inegalități pe care le obținem din studiul unor funcții pe care le construim.

1. *Să se arate că pentru numerele pozitive a, b, c cu $a+b+c = 1$ are loc inegalitatea:*

$$0 \leqslant ab + bc + ac - 2abc \leqslant \frac{7}{27}.$$

(O.I.M., Praga 1984)

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Putem presupune că $a \leqslant b \leqslant c$, de unde rezultă necesar $a \leqslant \frac{1}{3}$.

Pentru a dovedi inegalitatea din stînga, avem:

$$ab + bc + ac - 2abc = ab + bc(1 - a) + ac(1 - b) \geqslant 0.$$

Pentru a dovedi cealaltă inegalitate, înlocuim $c = 1 - a - b$ în expresia

$$ab + ac + bc - 2abc \text{ și găsim } b^2(2a - 1) + b(2a - 1)(a - 1) + a - a^2.$$

Pentru $b = a$, trebuie arătat că $a^2(2a - 1) + a(2a - 1)(a - 1) + a - a^2 \leqslant \frac{7}{27}$.

Considerăm funcția $F : \left[0, \frac{1}{3}\right] \to \mathbf{R}$, $F(t) = t^2(2t-1)+t(2t-1)(t-1)+t-t^2$ pentru care avem $F'(t) = 12t^2 - 10t + 2$. Rezultă că F are un maxim absolut în $t = \frac{1}{3}$ și deci $F(t) \leqslant F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}$.

Fie $b > a$ și fie funcția $G : [a, b] \to \mathbf{R}$, $G(x) = x^2(2a-1)+x(2a-1)(a-1)+a-a^2$ pentru care avem $G'(x) = (2a-1)(2x+a-1)$. Rezultă că G are un maxim absolut în $x = \frac{1-a}{2} \in [a, b]$ și deci $G(x) \leqslant G\left(\frac{1-a}{2}\right) = \frac{-2a^3+a^2+1}{4} \leqslant \frac{7}{27}$. Am folosit faptul că funcția $f : \left[0, \frac{1}{3}\right] \to \mathbf{R}$, $f(y) = \frac{-2y^3+y^2+1}{4}$ are un maxim absolut egal cu $\frac{7}{27}$ în $y = \frac{1}{3}$. Deci $G(b) \leqslant \frac{7}{27}$, q.e.d.

2. *Să se demonstreze că dacă a, b, c sînt numere reale strict pozitive, astfel încît $a+b+c=1$, atunci*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9.$$

* * *

Soluție. Fie $a \leqslant b \leqslant c$, de unde rezultă $a \leqslant \frac{1}{3}$. Înlocuind $c=1-a-b$ în expresia $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ obținem $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{1-a-b}$.

Pentru $b=a$ se verifică inegalitatea $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{1-2a} \geqslant 9$.

Fie $b > a$. Construim funcția $F : [a, b] \to \mathbf{R}$, $F(t) = \frac{1}{a} + \frac{1}{t} + \frac{1}{1-a-t}$, pentru care avem $F'(t) = \frac{(1-a)(2t+a-1)}{t^2(1-a-t)^2}$. Rezultă că F are un minim absolut în $t = \frac{1-a}{2} \in [a, b]$ și deci $F(t) \geqslant F\left(\frac{1-a}{2}\right) = \frac{3a+1}{a-a^2} \geqslant 9$. Am folosit faptul că funcția $g : \left(0, \frac{1}{3}\right] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{3x+1}{x-x^2}$ are un minim absolut egal cu 9 în $x = \frac{1}{3}$. Deci $F(b) \geqslant 9$, q.e.d.

Scanned with OKEN Scanner

3. *Dacă* $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, *atunci au loc inegalitățile:*

$$\operatorname{tg} a < \frac{\operatorname{Incos} a - \operatorname{Incos} b}{b - a} < \operatorname{tg} b.$$

(16670, G.M. 5/1977, *Gheorghe Sorin Gal*)

Soluție. Pentru a dovedi inegalitatea din stînga construim funcția $F : [a, b] \to \mathbf{R}$, $F(t) = \operatorname{Incos} a - \operatorname{Incos} t - (t - a) \operatorname{tg} a$. Avem $F'(t) = \operatorname{tg} t - \operatorname{tg} a > 0$ pentru $t > a$. Rezultă $F(b) > F(a) = 0$.

Pentru inegalitatea din dreapta se procedează asemănător considerînd funcția $G : [a, b] \to \mathbf{R}$, $G(t) = (t - a) \operatorname{tg} t + \operatorname{Incos} t - \operatorname{Incos} a$.

4. *Dacă* $1 \leqslant a < b$, *să se demonstreze că:*

$$\frac{b^n - a^n}{n} < \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

(16556, G. M. 3/1977, *Vasile Berghea*)

Soluție. Fie funcția $F : [a, b] \to \mathbf{R}$, $F(t) = \frac{t^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} - \frac{t^n - a^n}{n}$. Avem $F'(t) = t^{n-1}(t - 1) > 0$, pentru $t > a$. Rezultă $F(b) > F(a) = 0$, q.e.d.

5. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție de două ori derivabilă cu* $f'' \geqslant 0$. *Atunci pentru* $c, d \in [a, b]$ *avem inegalitatea:*

$$f(c) \geqslant f(d) + (c - d) f'(c).$$

* * *

Soluție. Pentru $c = d$, avem egalitate.

Fie $c < d$. Construim funcția $F : [c, d] \to \mathbf{R}$, $F(x) = f(x) + (c - x)f'(c) - f(c)$, pentru care avem $F'(x) = f'(x) - f'(c) \geqslant 0$. Rezultă F crescătoare și deci $F(d) \geqslant F(c) = 0$.

Presupunem $c > d$ și fie funcția $G : [d, c] \to \mathbf{R}$, $G(y) = f(d) + (y - d) f'(y) - f(y)$, pentru care avem $G'(y) = (y - d) f''(y) \geqslant 0$. Rezultă G crescătoare și deci $G(c) \geqslant G(d) = 0$, q.e.d.

Desigur, sfera aplicațiilor de tipul celor cuprinse aici poate fi lărgită. Cititorii pot găsi multe probleme în G.M. a căror rezolvare se poate baza pe construcția și studiul unor funcții.

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

17. Perimetrul unui dreptunghi este 40 cm. Știind că lungimea dreptunghiului este de 4 ori mai mare decît lățimea, să se determine cîte pătrate cu latura de 2 cm conține dreptunghiul.

* * *

18. Suma dintre un număr x și un număr y este 50. Suma dintre x și jumătatea lui y este 40. Aflați numerele x și y.

* * *

19. Ziua de 1 octombrie a unui an calendaristic „a căzut" în ziua de marți a unei săptămîni. În ce zi din săptămînă din același an calendaristic va cădea ziua de 1 noiembrie. Dar ziua de 1 decembrie?

* * *

20. Să se determine x știind că media aritmetică a numerelor $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 7$, $a_4 = x$, $a_5 = x$, $a_6 = 10$, $a_7 = 8$ este 9.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

21. Stabiliți dacă următorul pătrat

8	6	13
12	10	5
7	11	9

este magic sau nu.
(Un pătrat se numește magic dacă suma numerelor din cele trei căsuțe ale pătratului situate pe oricare linie, coloană sau pe oricare diagonală este aceeași).

Liviu Anton Pîrșan, elev, București

22. Suma a 4 numere este 292. Primul și al doilea au împreună 140. Al patrulea este mai mare decît al treilea cu 12 și decît al doilea cu 2. Care sînt cele 4 numere?

Maria Pop, învățătoare, Fieni, Dîmbovița

23. Determinați toate numerele naturale care împărțite la 10 dau citul egal cu restul.

* * *

24. Determinați numărul de două cifre care este egal cu de 6 ori suma cifrelor sale. Compuneți și rezolvați o problemă asemănătoare în care să înlocuiți pe 6 cu 8.

Problemele 17—20 și 24 sînt propuse de *L. PÎRȘAN*.

* * *

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E: 8795* (G.M.3/1986, pag. 87)
Calculați:

$$2\frac{1}{11}\cdot 2\frac{12}{13}+1\frac{2}{11}\cdot 2\frac{1}{13}+\frac{10}{11}\cdot 7\frac{1}{13}.$$

* * *

Soluție. Avem succesiv:

$$2\frac{1}{11}\cdot 2\frac{12}{13}+1\frac{2}{11}\cdot 2\frac{1}{13}+\frac{10}{11}\cdot 7\frac{1}{13}=$$

$$=\frac{23}{11}\cdot\frac{38}{13}+\frac{13}{11}\cdot\frac{27}{13}+\frac{10}{11}\cdot\frac{92}{13}=\frac{874+351+920}{143}=\frac{2145}{143}=15.$$

Soluție bună au dat: *Adrian Popescu* cl. a VI-a Ș.g. 15 Pitești; *Cristian Florian Batali*, cl. a VI-a Ș. g. 21 Cluj-Napoca; *Mihaela Gamba* Ș.g. 2. Lugoj.

Clasa a VI-a

Problema E: 8804* (G. M. 3/1986, pag. 88)

Numărul natural n are numai doi divizori d_1 și d_2 în mulțimea numerelor naturale. Se știe că $d_1+d_2=37$. Să se afle n. Aceeași întrebare dacă $d_1+d_2=$

Scanned with OKEN Scanner

$= 38$. *Cum explicați răspunsul găsit? Cum trebuie să se dea suma* d_1+d_2 *pentru ca problema să aibă soluție?*

Iudith Mentzel, studentă, Cluj-Napoca

Soluție. Numărul n având doi divizori în mulțimea numerelor naturale, rezultă că el este prim, iar divizorii săi sînt în acest caz $d_1 = 1$ și $d_2 = n$. Condiția $d_1 + d_2 = 37$ devine $1+n = 37$, de unde rezltă că $n = 36$. Deoarece 36 nu este număr prim, problema nu are în acest caz soluție.

Dacă $d_1 + d_2 = 38$ avem $1+n = 38$ de unde rezultă $n = 37$, care este număr prim, deci problema admite în acest caz soluția $n = 37$. Pentru ca problema să aibă soluție, suma $d_1 + d_2$ trebuie să fie egală cu $p + 1$ unde p este un număr prim.

Soluție dată de *Naște Dan* cl. a VI-a, S. g. 14 Baia Mare; *Drăghici Marius*, cl. a VI-a, Șc. gen. 6 Galați; *Dăscăloiu Roxana Elena* cl. a V-a, Șc gen, 1 Moinești; *Vasiu Ileana*, cl. a VII-a, Șc. gen. Gătaia (Timiș); *Giurgiu Octavian*, cl. a VI-a, Șc, gen. 5 Cîmpia Turzii; *Milan Andra*, cl. a VI-a, Șc. gen. 4 Curtea de Argeș.

Clasa a VII-a

Problema E: 8835* (G. M. 4/1986, pag. 133)

Să se arate că

$$E = n^2m + nm^2 + n^2+m^2 + 2mn + n + m,$$

este divizibil cu 2 pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

* * *

Soluție. Descompunînd pe E în produs de factori obținem

$$E = (n + m)(n + 1)(m + 1).$$

Numerele n și m fiind naturale ele pot fi de aceeași paritate sau de parități diferite. Dacă n și m sînt de aceeași paritate atunci factorul $n + m$ va fi întotdeauna par, deci E se divide cu-2. Dacă n și m sînt de parități diferite atunci și factorii $(n + 1)$ și $(m + 1)$ vor fi de parități diferite, deci unul din ei va fi sigur par, prin urmare E se divide cu 2.

Soluție dată de *Dușmănescu Adriana*, cl. a VI-a, Șc. gen. 11 Buzău; *Curuia Georgiana* și *Bratu Ștefănel*, cl. a VII-a, Lic. ind. 7 Rm. Vîlcea; *Petrican Antigona*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 25 Galați.

Clasa a VIII-a

Problema E: 8817* (G. M. 3/1986, pag. 89)

Să se determine a *și* b *știind că polinomul* $P(X) = 2aX^3 + 2bX^2 + 3X + 5$ *se divide cu* $X + 1$ *iar suma coeficienților este un număr prim.*

Ileana Bizău și *Ioan Bizău*, profesori, Sighetu Marmației

Soluție. Deoarece $X + 1$ divide $P(X)$ rezultă că $P(-1) = 0$, adică $b-a + 1 = 0$; (1). Suma coeficienților polinomului $P(X)$ este egală cu $P(1) = 2a + 2b + 3+5 = 2(a+b+4)$. Singurul număr prim par este 2, deci $a+b+4 = 1$, (2). Folosind egalitățile (1) și (2) obținem sistemul

$$\begin{cases} b - a + 1 = 0 \\ a + b + 4 = 1, \end{cases}$$

cu soluția $a = -1, b = -2$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție dată de *Ioniță Doru*, cl. a VII-a Șc. gen. 1 Rm. Sărat; *Grosu Iulius*, cl. a IX-a, Lic. mat. fiz. „C. Negruzzi" Iași.

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9083*. Să se determine toate numerele naturale de forma $\overline{ab}$ care sînt divizibile cu $a+2b$.

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

E : 9084*. Pentru ce $x \in N$ avem pe rînd :

a) $\frac{3}{5} > \frac{x+1}{35} > \frac{3}{7}$; b) $\frac{2}{3} < \frac{x+1}{5} < \frac{5}{7}$?

* * *

E : 9085. Calculați numărul :

$$a = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 8}.$$

* * *

E : 9086. Reconstituiți înmulțirea :

$$\begin{array}{r} 2**\cdot 3** \\ \hline 5** \\ *4* \\ **3 \\ \hline ***** \end{array}$$

(Revista Alpha, nr. 6/1982)

E : 9087. Reconstituiți adunarea :

$$\overline{PLUS} + \overline{PLUS} + \overline{PLUS} + \overline{PLUS} = \overline{MATHE}.$$

(Revista Alpha, nr. 6/1982)

E : 9088*. Să se afle cele mai mici 100 numere naturale consecutive a căror sumă să fie divizibilă cu 105. Produsul acestor numere este divizibil cu 10^{25}?

Maria Vizuroiu, *Nicolae Vizuroiu*, profesori, Pitești

Clasa a VI-a

E : 9089*. Fie un triunghi isoscel ABC cu $\hat{A} = 90°$. Pe laturile congruente se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABD și ACE. AD întîlnește pe CE în M. Să se demonstreze că :

1) $AM \perp CE$;

2) patrulaterul $BCDE$ este trapez isoscel.

Georgiana Mirea, elevă, Tîrgoviște

E : 9090. Fie $ABCD$ un dreptunghi în care $AB = 2l$ și $BC = l$. Fie punctele P, T și Q mijloacele laturilor AB, AD și respectiv BC. Se cere :

1) Să se arate că $\Delta PTD \equiv \Delta PQC$;

Scanned with OKEN Scanner

2) Să se arate că DP este bisectoarea unghiului ADC;
3) Să se precizeze natura triunghiului PDC.

Traian Popescu, elev, Constanța

E : 9091*. Într-o urnă tip LOTO sînt 40 bile numerotate de la 1 la 40. Să se afle numărul minim al bilelor care trebuie scoase din urnă pentru a fi siguri că am scos două bile ale căror numere au diferența mai mică decît 10.

Florian Dumitrel, profesor, Slatina, Olt

E : 9092. Să se arate că dacă $12x = 5y = 1$, atunci

a) $\sqrt{x^2+4x+29}+\sqrt{y^2+14y+58}-\sqrt{x^2+y^2}=13$.

b) $\sqrt{x^2-6x+58}+\sqrt{y^2-10y+29}+\sqrt{x^2+y^2}=13$.

C. Ionescu-Țiu, București

E : 9093*. Dacă $a, b, c \in \mathbf{Z}$ și $2a-3b+4c=0$, atunci 6 divide numărul $A = b(a-c)$.

Daniel Cojocaru, profesor, Slatina

E : 9094. Demonstrați că dacă numerele a, b, c sînt măsurile laturilor unui triunghi, atunci și numerele $a' = \frac{a}{1+a}$, $b' = \frac{b}{1+b}$, $c' = \frac{c}{1+c}$ sînt măsurile laturilor unui triunghi.

Petrică Ciungu, profesor, Tîrgu Jiu

Clasa a VII-a

E : 9095*. Fie un cerc de centru O și o coardă în acest cerc, mobilă și de lungime constantă. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor tangente în același timp la coarda dată și la cercul de centru O.

Mircea Bîrsan, elev, Iași

E : 9096. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$). Două drepte paralele duse prin punctele A și B intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului în punctele D și respectiv E. Să se arate că $AE \parallel CD$.

Virgil C. Radu, elev, Iași

E : 9097*. Se dă triunghiul isoscel ABC în care $\hat{B} = \hat{C} = 70°$. Pe laturile AB și AC se consideră punctele F și respectiv E astfel încît $\sphericalangle ABE = 15°$ și $\sphericalangle ACF = 30°$. Se cere să se calculeze $\sphericalangle AEF$.

Vasile Mîrmea, matematician, Brăila

E : 9098. Să se determine numărul A de forma $A = 3^x \cdot 5^y \cdot 17^z$ știind că $17 \cdot A$ are cu 56 divizori pozitivi mai mulți decît A iar $125 \cdot A$ are cu 189 divizori pozitivi mai mulți decît A. (Numărul $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, cu p_i numere prime, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, are $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n+1)$ divizori pozitivi).

Ioniță Petre, Pitești, Argeș

E : 9099*. Determinați numerele întregi m și n astfel încît

$$mn - (m+n) = 1986.$$

I. Safta, profesor, Pitești

Scanned with OKEN Scanner

E : 9100. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, o funcție cu proprietatea că există m și n numere reale, $m^2 \neq n^2$, astfel încît

$$mf(2+x) + nf(3-x) = \begin{cases} x+1, \text{ pentru } x \leqslant 1 \\ -x-1, \text{ pentru } x > 1. \end{cases}$$

Să se determine legea funcției f știind că $f(2) = 1$ și $f(3) = 0$.

Petrică Ciungu, profesor, Tîrgu Jiu

Clasa a VIII-a

E : 9101*. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem :

$$x^4 + x^2 + 1 \geqslant \frac{3}{2} x(x^2 + 1).$$

Valerian Vlăescu, profesor, Dorohoi

E : 9102*. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură a se notează cu M și N mijloacele muchiilor AB respectiv AD iar cu E și F mijloacele muchiilor $B'C'$ respectiv $D'C'$.

a) Să se demonstreze că planele $A'MN$ și CEF sînt paralele.

b) Să se calculeze distanța dintre planele AMN și CEF.

Ion Diaconu, profesor, Piatra Neamț

E : 9103. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ există două numere naturale a și b, nedivizibile cu n, astfel încît $n \mid a^n + b^n$.

Rămîne afirmația adevărată dacă a și b sînt relativ prime cu n?

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

E : 9104*. Latura unui triunghi echilateral este a. Să se determine pe segmentul AB un punct P, astfel încît volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului APC în jurul dreptei AC să fie de patru ori volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului BPC în jurul laturii BC.

Andrei Poroliseanu, profesor, Sibiu

E : 9105. Se dă un cerc de centru O și diametru AB. În B se duce perpendiculara pe planul cercului, pe care se ia punctul T astfel încît $BT = 4$ cm. Tangenta în B la cerc taie AM în C, unde M este mijlocul arcului AB. Dacă $AC = 6$ cm, aflați aria laterală și volumul tetraedrului $TABC$.

V. Ghizdavu, profesor, Slatina, Olt

E : 9106. Să se determine numerele reale x, y, z care verifică simultan relațiile : $xy + yz + zx = -1$, $x + y + z + xyz = 0$.

Liviu Pîrșan

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G. : 43. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AD și fie O_1 și O_2 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD și ADC. Notăm : $BO_1 \cap DO_2 = \{N\}$, $CO_2 \cap DO_1 = \{M\}$. Să se arate că :

1) $AO_1 \perp AN$, $AO_2 \perp AM$;

2) $AO_1 \cdot AO_2 = AM \cdot AN$.

Laura Constantinescu, profesoară, Sibiu

Scanned with OKEN Scanner

O.G. : 44. Determinați cifrele distincte a, b și c, astfel încît

$$\overline{abc}\cdot\overline{abc} = \overline{nabc}$$

unde n este cifră sau număr natural.

Liviu Pîrșan și *Ionel Gh. Tudor*

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 20701* (G.M.3/1986 pag. 90)

Arătați că ecuația :

$$\frac{(x^2+x+1)^4+(x^2-x+1)^4}{(x+1)^4+(x-1)^4} = \frac{41}{128}$$

admite două rădăcini duble raționale.

Liviu Pîrșan

Soluția autorului. Ecuația se mai poate scrie :

$$128\,(x^2+x+1)^4+128(x^2-x+1)^4=41(x^2+2x+1)^4+41(x^2-2x+1)^4.$$

Împărțind ambii membri ai ecuației cu x^4 avem :

$$128\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^4+128\left(x+\frac{1}{x}-1\right)^4=41\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^4+41\left(x+\frac{1}{x}-2\right)^4.$$

Notăm $x+\frac{1}{x}=t$ și ecuația devine :

$$128(t+1)^4+128(t-1)^4=41(t+2)^4+41(t-2)^4 \text{ sau } 128(2t^4+12t^2+2)=41(2t^4+48t^2+32)$$

sau după reduceri și simplificări obținem

$$29t^2-72t^2-176=0 \text{ sau } 29(t^2-4)\left(t^2+\frac{44}{29}\right)=0.$$

Convin rădăcinile : $t_1=2$, $t_2=-2$; $t_{3,4}\notin\mathbb{R}$.

Revenind la ecuația $x+\frac{1}{x}=t$ rezultă ecuațiile :

$$x+\frac{1}{x}=2 \text{ cu } x_1=x_2=1 \text{ și } x+\frac{1}{x}=-2 \text{ cu } x_3=x_4=-1.$$

Observație. Problema admite generalizare.

Clasa a X-a

Problema 20655* (G.M. 1/1986, pag. 23)

Să se determine polinoamele $P(X)$ și $Q(X)$ care îndeplinesc simultan condițiile :

$$(x+1)\cdot P(x-1)-x^2\cdot Q(x+1)=x^2-x-1$$

$$P(x+1)-(x+2)\cdot Q(x+3)=-1$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Sermin Pirnac, profesor, Clănița, Teleorman

Soluție. În relația a doua din enunț punem $x\to x-2$ și avem :

$$P(x-1)=x\cdot Q(x+1)-1, \qquad (1).$$

Ținînd seama de (1), prima relație din enunț devine :

$$(x+1)\cdot[x\cdot Q(x+1)-1]-x^2\cdot Q(x+1)=x^2-x-1$$

sau făcînd calculele rezultă :

$$Q(x+1)=x, \qquad (2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de (2), relația (1) devine:

$$P(x-1) = x^2-1 \text{ sau } P(x) = (x+1)^2-1.$$

Deci: $P(x) = x(x+2)$ și $Q(x) = x-1$.

Clasa a XI-a

Problema 20717* (G.M.3/1986, pag. 93)

Fie polinomul $f \in \mathbf{R}[x]$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ *care are* n *rădăcini reale distincte,* $n \geq 1$. *Să se arate că polinomul*

$$g(x) = a_n \cdot x^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + a_{i+1}(i+1))\, x^i$$

are toate rădăcinile reale.

* * *

Soluție. Avem $g(x) = a_n \cdot x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \cdot (i+1) \cdot x^i = f(x) + f'(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile reale distincte ale polinomului f unde $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Considerăm funcția $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = e^x \cdot f(x)$. Derivata lui h este dată de

$$h'(x) = e^x(f(x) + f'(x)) = e^x \cdot g(x).$$

Deoarece $h(x_i) = h(x_{i+1}) = 0$ unde $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ rezultă conform teoremei lui *Rolle* că există $y_i \in (x_i, x_{i+1})$ astfel încît $h'(y_i) = 0$ adică $e^{y_i} \cdot g(y_i) = 0$ sau $g(y_i) = 0$ deoarece $e^{y_i} > 0$. Deci fiecare interval de forma (x_i, x_{i+1}), $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, conține cel puțin o rădăcină reală a lui g. Cum sînt $(n-1)$ intervale rezultă că g are cel puțin $(n-1)$ rădăcini reale. Deoarece coeficienții lui g sînt reali și gradul lui g este n rezultă că toate cele n rădăcini ale lui g sînt reale.

Clasa a XII-a

Problema 20726* (G. M. 3/1986, pag. 94)

Se consideră ecuația $x^3 - x + 1 = 0$ *cu rădăcinile* x_1, x_2, x_3. *Calculați* $x_1^{16} + x_2^{16} + x_3^{16}$.

* * *

Soluție. Notăm $s_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $k \in \mathbf{N}$. Avem: $s_1 = 0$; $s_2 = 2$; $s_3 = -3$. Relația de recurență pentru s_k este $s_k = s_{k-2} - s_{k-3}$. Deci

$$s_4 = s_2 - s_1 = 2;\ s_5 = s_3 - s_2 = -5;\ s_6 = s_4 - s_3 = 5;\ s_7 = s_5 - s_4 = -7;\ s_8 = s_6 - s_5 = 10;$$

$$s_9 = s_7 - s_6 = -12;\ s_{10} = s_8 - s_7 = 17;\ s_{11} = s_9 - s_8 = -22;\ s_{12} = s_{10} - s_9 = 29;\ s_{13} = s_{11} - s_{10} = -39;$$

$$s_{14} = s_{12} - s_{11} = 51;\ s_{15} = s_{13} - s_{12} = -68;\ s_{16} = s_{14} - s_{13} = 90.$$

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21037*. a) Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale ale căror pătrate se pot scrie ca suma cuburilor a trei numere naturale.

b) Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale ale căror cuburi se pot scrie ca suma cuburilor a trei numere naturale.

Mihail Beneze, profesor, Brașov

Scanned with OKEN Scanner

21038*. Să se rezolve și să se discute inecuația:

$$\sqrt{a+x} \leqslant \frac{2x}{a} + \sqrt{a-x},$$

unde a este un număr real pozitiv.

Rodica Marinescu, profesoară, Pitești

21039. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să se arate că

$f(x+a) = f(x) + a$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $f(x) = a\left[\frac{x}{a}\right] + f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

Prin $[t]$ și $\{t\}$ am notat partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real t.

Florin Vulpescu-Jalea, profesor, București

21040. Să se arate că în orice triunghi ABC dreapta care unește punctul de intersecție al simedianelor cu mijlocul unei laturi trece prin mijlocul înălțimii corespunzătoare acelei laturi.

Nicolae Oprea, profesor, Livada, Satu Mare

21041*. Să se arate că mediana relativă la latura AC a unui triunghi ABC de laturi $AB=13$, $BC=5$, $AC=10$ este împărțită în trei părți congruente de cercul înscris în triunghi. (În legătură cu problema 20256, G.M. 11/1984).

Lucian Tufescu, profesor, Craiova

21042. Patru cercuri sînt secante într-un punct, iar două cîte două în alte patru puncte. Arătați că cele patru puncte sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil dacă și numai dacă cercurile alăturate sînt ortogonale.

Bogdan Popescu, elev, București

21043. În triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$), construim $AD \perp BC$, ($D \in (BC)$) și BE bisectoarea unghiului ABC ($E \in (AC)$). Notînd $AD \cap BE = \{I\}$ și $ED \cap AB = \{F\}$, să se demonstreze că $CF \perp CI$.

Leon Genoiu, profesor, Rm. Vîlcea

Clasa a X-a

21044*. Să se demonstreze că numărul $C_{np}^{p} - n$ se divide cu p^2, p fiind un număr prim. (Pentru $n = 3$ se obține problema 20764* din G.M. 5/1986).

Lucian Cosma, elev, Sibiu

21045*. Să se rezolve ecuația:

$$m \cdot \sin bx + n \cdot \cos bx = p \cdot \sin ax + q \cdot \cos ax,$$

știind că $m^2 + n^2 = p^2 + q^2$ unde $a, b, m, n, p, q \in \mathbb{R}^*$.
(O generalizare a problemei 20768*, din G.M. 5/1986).

Delia Mufiu, elevă, Sibiu

21046. Triunghiul ascuțitunghic ABC este înscris într-un cerc de centru O. Dreptele (BO) și (CO) intersectează laturile (AC) respectiv (AB) în E și F. Fie $P \in [BF]$ și $Q \in [CE]$. Demonstrați că punctul O este situat pe dreapta PQ dacă și numai dacă

$$\frac{PB}{PA} \cdot \sin 2B + \frac{QC}{QA} \cdot \sin 2C = \sin 2A.$$

Vasile Berghea, Avrig

21047*. În triunghiul ABC, ascuțitunghic, notăm cu (AD), (BE), (CF) înălțimile sale. Fie $P \in [BF]$ și $Q \in [CE]$. Demonstrați că ortocentrul H aparține dreptei PQ dacă și numai dacă

$$\frac{PB}{PA} \cdot \operatorname{tg} B + \frac{QC}{QA} \cdot \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A.$$

Vasile Berghea, Avrig

Scanned with OKEN Scanner

21048. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC cu $m(A)=60^\circ$, iar R raza cercului circumscris triunghiului. Să se arate că:

$$a^4+b^4+c^4\leqslant 27R^4.$$

V. Cîrtoaje, Ploiești

21049. Să se arate că în orice patrulater inscriptibil, circumscriptibil și ortodiagonal are loc relația:

$$OI=\sqrt{R^2+r^2-r\sqrt{4R^2+r^2}}$$

unde O, respectiv I, sînt centrele cercurilor circumscris, respectiv înscris patrulaterului, iar R, razele acestor cercuri.

Nicolae Bîșboacă și *Nicolae Grainic*, profesori, Alba Iulia

21050. Fie un triunghi ascuțitunghic ABC, A_1 și A_2 simetricele punctului A față de B și respectiv C, P proiecția punctului A_1 pe dreapta AA_2 și Q proiecția punctului A_2 pe dreapta AA_1. Demonstrați că:

$$m(A)=60^\circ\Leftrightarrow PQ\equiv BC.$$

I. Safta, profesor, Pitești

Clasa a XI-a

21051*. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu termenii în progresie aritmetică cu rația $r>0$ și $a_1=1$. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\sqrt[n]{a_3}+\ldots+\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\ldots+\sqrt{a_n}}.$$

O generalizare a problemei 20051, G. M. 3/ 1984).

Radu Ghenghiu, profesor, Oradea.

21052. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n și $\det(A^n)$ unde $n\in\mathbb{N}$.

Aurel Doboșan, profesor, Lugoj

21053*. Să se arate că dacă a, b, $c\in\mathbb{R}_+^*$ și $\frac{a}{b}\geqslant\frac{c}{a}$ atunci

$$\frac{\ln(1+a)}{\ln(1+b)}\geqslant\frac{\ln(1+c)}{\ln(1+a)}$$

O generalizare a problemelor 17801 din G.M. nr. 6/1979 și 7 pag. 81 din G.M. nr. 3/1985).

Ion Bursuc, student, Iași

21054. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir definit în modul următor:

$$x_k=a\cdot x_{k-1}+x_{k-2},\ k\geqslant 2,\ k\in\mathbb{N},\ x_0=a,\ x_1=a^2\ \ (a\neq 0).$$

Să se demonstreze că:

$$x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2=\frac{x_n\cdot x_{n+1}}{a},\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}.$$

Augustin Stan, profesor, Oradea

Scanned with OKEN Scanner

21055*. Fie ABC un triunghi de arie S, M un punct mobil în planul triunghiului. A', B', C' respectiv proiecțiile lui M pe dreptele BC, CA, AB iar $\rho(M)$ puterea lui M față de cercul circumscris triunghiului ABC de rază R. Să se arate că:

$$\sigma[A'B'C'] = \frac{S}{4R^2}\,|\rho(M)|.$$

Gheorghe Szöllösy, profesor, Sighetu Marmației

21056. Fie $a_0 > 0$ și $a_{n+1} = a_n \cdot 2^{-a_n}$ $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$.

Florian Dumitrel, profesor, Slatina, Olt

21057. Fiind dată matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ să se arate că A^n este de forma:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_n & y_n \end{pmatrix} \text{ unde } x_n,\ y_n \text{ și } n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n + y_n}{5^n + 1}$.

D. Săvulescu, profesor, Bacău

Clasa a XII-a

21058*. Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție integrabilă și $a, b, c \in \mathbf{R}$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 1$, să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^c} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(a + i\frac{b}{n}\right) f\left(a + j\frac{b}{n}\right).$$

Gh. Miculescu, profesor, Tîrgoviște

21059. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu $f''(x) > 0$. Atunci $(\forall)\ y \in [a, b]$ avem inegalitatea:

$$2\int_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a)\,f(y) - y(f(b) - f(a)) + bf(b) - af(a).$$

Gh. Miculescu, profesor, Tîrgoviște

21060. Demonstrați că dacă un grup G are două elemente de ordinul doi atunci ele aparțin centrului acestui grup.

Gh. Stoica, student, București

21061*. Fie $(G, \cdot)$ un grup multiplicativ finit astfel încît $f : G \to G$, $f(x) = x^3$ este un automorfism. Să se arate că ordinul lui G este impar.

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

21062. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x \sin(\sin^2 x) \cos(\cos^2 x)\,dx$.

Florian Dumitrel, profesor, Slatina, Olt

21063. Arătați că există $a > 0$ astfel încît

$$\int_0^1 (\cos ax) \sin \sqrt{1 - x^2}\,dx = 0.$$

Gh. Stoica, student, București

Scanned with OKEN Scanner

21064*. Se dă ecuația

$$(x+a)^{2n+1}-(x-b)^{2n+1}=\frac{1}{2^{2n}}(a+b)^{2n+1};\ n\in\mathbf{N}^*;\ a,\ b\in\mathbf{R},\ a+b\neq 0$$

Să se arate că:

a) Ecuația are o rădăcină reală dublă care să se determine.

b) Toate celelalte rădăcini $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}$ sînt din $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$.

c) $$\sum_{1\leq k\leq n-1}(2x_1+a-b)(2x_2+a-b)\ldots(2x_{2k}+a-b)=\frac{C_{2n}^{2k}}{2k+1}(a+b)^{2k}.$$

(În legătură cu problema 20756, G.M. 4/1986).

Ionel Gh. Tudor, profesor, Călugăreni, Giurgiu

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M.

0 : 506. Fie A mulțimea numerelor naturale $n\geq 3$ cu proprietatea: $(\forall)\ m\in\mathbf{N},\ m\geq 2,$ $(m, n)=1\Rightarrow m$ este număr prim. Să se demonstreze că mulțimea A este finită.

Costel Chiteș, profesor, Bacău

0 : 507. Să se rezolve în numere întregi ecuația $xy=z^4$.

Florin Vulpescu-Jalea, profesor, București

0 : 508. Pentru orice patrulater convex notăm cu s suma distanțelor vîrfurilor patrulaterului la cele două diagonale, cu d_1, d_2 lungimile celor două diagonale și cu $2p$ perimetrul patrulaterului. Să se demonstreze că într-un patrulater convex $s+d_1+d_2=2p\sqrt{2}$ dacă și numai dacă patrulaterul este pătrat.

D. M. Bătinețu-Giurgiu, profesor, București

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C : 673. Fie $a\in\mathbf{Z}$ un număr par și x_1, x_2 rădăcinile ecuației $x^2+ax+1=0$. Să se arate că $(\forall)\ k\in\mathbf{Z}$, numărul $u_k=x_1^k+x_2^k$ este întreg prim cu a^2-1.

I. Cucurezeanu, Constanța

C : 674. Prin punctul $M\in\mathrm{Ext}\,\mathcal{C}(0, r)$ se duce o secantă care taie cercul în punctele A și B. Să se arate că oricare ar fi coarda $A'B'$ a cercului $\mathcal{C}(0, r)$ paralelă cu AB avem $MA+MB\leq MA'+MB'$.

Emil C. Popa, profesor, Sibiu

C : 675. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $x\,[kx]=\{x\}$, unde $k\in\mathbf{N}$.

D. M. Bătinețu-Giurgiu, profesor, București

C : 676. Fie poligoanele regulate $A_1A_2\ldots A_n$ și $B_1B_2\ldots B_n$ cu vîrfurile indexate în același sens de rotație. Dacă $\overrightarrow{A_iB_i}=x_i\in\mathbf{R}_+^*,\ i=\overline{1,n}$, atunci cu segmentele care au lungimile $x_1x_2\ldots x_k, x_2x_3\ldots x_{k+1}, \ldots, x_nx_1x_2\ldots x_{k-1}$ se poate construi un poligon convex cu C_n^k laturi, unde $1\leq k\leq n-2$.

Marian Dincă, București

Clasele a XI-a și a XII-a

C : 677. Pentru fiecare $k\in\mathbf{N}^*$, notăm $\mathbf{N}_k=\{1, 2, \ldots, k\}$. Să se arate că:

a) Pentru orice $x\in\mathbf{N}_{mn}$, $f(x)\overset{\text{def}}{=}m(x-1)+1+(1-mn)\left[\frac{x-1}{n}\right]\in\mathbf{N}_{mn}$;

Scanned with OKEN Scanner

b) Funcția $f : N_{mn} \to N_{mn}$ este o bijecție (permutare de ordinul mn). Să se determine signatura permutării f.

Virgil Nicula, profesor, București

C : 678. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir neconstant, convergent către $x \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că există $a, b, u \in \mathbb{R}_+^*$ așa încît $a|x_n - x|^u \leqslant |x_{n+1} - x| \leqslant b|x_n - x|^u$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$. Să se arate că :

a) Există un unic u cu proprietatea menționată ; b) Șirurile $x_n = \frac{1}{n}$ și $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ verifică condițiile din ipoteza de mai sus.

Gh. Stoica, student, București

C : 679. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel necomutativ și $a, b \in A$. Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$ atunci $1 - a^m b^n$ este inversabil în A dacă și numai dacă $1 - b^n a^m$ este inversabil în A. (O extindere a problemei 20772).

Walter Farcaș, student, București

C : 680. Să se determine funcțiile continue $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, așa încît $f(f(x) + g(y)) = x + y$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

Viorel Bândilă și *Florin Vulpescu-Jalea*, profesori, București

PROBLEME DE INFORMATICĂ

I : 313. Să se utilizeze calculatorul electronic pentru a determina cu eroarea $\varepsilon = 10^{-6}$, următoarea limită :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin(\sin x)} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\sqrt{1+x}\right).$$

Marin Vlada, matematician, București

I : 314. Fie p un număr prim impar, a un întreg, $a > 1$. Să se demonstreze, printr-un program FORTRAN, că divizorii primi impari ai numărului $a^p + 1$ sau îl divid pe $a+1$, sau sînt de forma $2px + 1$, x întreg și în acest ultim caz să se determine x.

Constantin Bozdog, student, București

I : 315. Se știe că un număr natural se divide cu 27 dacă și numai dacă suma numerelor obținute din numărul formînd grupe de cîte trei cifre începînd de la dreapta, se divide cu 27. Să se alcătuiască un program care să testeze dacă numărul natural $N = 4544721$ este divizibil cu 27.

Doina Cristea, studentă, București

I : 316. Să se scrie un program care să genereze factorii primi ai numerelor de forma $a^{2^n} + 1$, știind că aceștia sînt de forma $2^{n+1}h + 1$. Să se demonstreze că factorii primi au această formă.

Marinela Podoleanu, studentă, București

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

ADJUD (VRANCEA) Ş. g. 1 cl. V Bostan Maria (69) ; **AFUMAŢI** (DOLJ) Ş. g. cl. VII Preda Dumitru Felician (234) ; **AIUD** (ALBA) Ş. g. cl. VI Bojor Maria (99) ; Lic. ind. „A. Iancu" cl. X Kolir Mirela (250), cl. XI Kohr Gabriela (150) ; **ALBA IULIA** (ALBA) Ş. g. 1 cl. IV. Tecău Ramona (60), cl. V Tecău Cornel (240), cl. VII Potopea Geanin a (35), Potopea Traian (35), Sintimbrean Gheorghe (209), Tontsch Urve (63), Voinc Maria (51) ; Ş. g. 2 cl. VIII Ceuca Dana (110), Cimponeriu Adrian Emilian (169) ; Ş . g. 6 cl. V Ilie Cosmin (20), cl. VII Anghelin Nicoleta (19), Iolan Crinela (28), Trifu Mirceа, (68), Truța Alina (25), Ungur Mircea Gabriel (60) ; Ş. g. 7 cl. VI Dan Roxana Marsilia (100) ; Lic. economic cl. XI Zanca Adrian (90) ; **ALEXANDRIA** (TELEORMAN) Ş. g. 2 cl. V Nica Sandu Nini (100), Stoica Adrian (80),

Scanned with OKEN Scanner

cl. VI Dinu Liliana (150), Falcă Anișoara (100), Iogăr Mihaela (124), Loghin Irina (108), Moncea Florentina (37), Nedelea Cătălina (100), Nicolescu Mircea (100), Petrescu Robert (100), Sudorana Marian (60), Ulmeanu Natașa (112), Voicu Ana (141), Voinea Raluca (114); Ș.g. 3 cl. V Balciu Alina (10), Ceaușu Cecilia Ramona (100), Gemălescu Venera (80) Georgescu Andreea (80), Gibo Aniela (140), Gîtlan Peța Elena (65), Liceanu Eleonora Valentina (72), Niculcea Luminița (45), Popa Nadina (110), PuchinMirela (93), Vidu Florin (100), cl. VI Cioc Pompiliu Ovidiu (98), Tifrea Magdalena (99), cl. VII Mareș Octavian Corneliu (304), Ionescu Daniela (80), Oanță Sergiu (90), cl. VIII Ionescu Aurel (75); Ș. g. 4 cl. VI Crăciunica Dănuț (100); Ș.g. 7 cl. VI Lazăr Alina Beatris (83). Tudor Crina Ionela (105); Lic. mat. fiz. cl. X Primichir Amelia Florinela (260); **ALMAȘU (SĂLAJ)** Ș.g. cl. VI Igna Ioana (140), Petean Claudia (140), cl. VII Alb Ovidiu (108), Varga Iudita (80); **AMĂRĂȘTI (VÎLCEA)** Ș.g. Nemoiu cl. VI Iana Mihaela (135), Popescu Luminița (100); **APELE VII (DOLJ)** Ș.g.1 cl. V Diaconescu Daniel (60), cl. VII Bogdan Daniel (100);

ARAD (ARAD) Ș.g.1 cl. VI Petcu Claudia (109), Străuț Radu (130); Ș.g. 6 cl VI Ciorba Luminița (85), cl. VII Căliman Geanina (118), Dercu Bianca (34), Ilie Camelia (66), Lucaciu Claudia (87), Mihai Mihaela (83), Vulpe Bianca (289), cl. VIII Copaciu Daniela (112); Ș.g.12 cl. VI Chiș Călin (50); Ș.g. 18 cl. VII Milovan Renate (120); Ș.g.19 cl. VI Verzea Valentin (166); Ș.g. „Iacobini" Vesa Viorica (96); Ș.g. Sebiș Barna Florin (63); Lic. ind. 12 cl. V Blaga Radu (71), Ghidău Marius (64), Gyeneș Cezar (77), cl. VI Bocescu Anca (89); Lic. „I. Slavici" cl. V Chera Delia (90), Deta Mirena (176), cl. VI Neamțu Alin (120), Pîturescu Codruța (85), Verzea Onorina (230), cl. VII Verzea Valentin (190), cl. IX Bota Codruța (92); **AZUGA (PRAHOVA)** Ș.g. cl. I—X cl. V Ciucu Mirela (56), Constantinescu Radu Florin (100), Matei Magdalena (70), Negoiță Carmen (67), Negoiță Mihaela Violeta (78), Oprea Daniela (64), Stanciu Gabriela (73), cl. VI Bagossy Roland (148), Bădilă Mihai (183), Blaseu Cristian (140), Ghiriac Răzvan (140), Cîrstea Narcis (125), Crețu Carmen (0), Ganea Liviu (203), Neagor Elena (92), Oprea Denisa (86), Samoilă Cristian (50), Spiridon Marian (266), Stoiceseu Daniela Anca (100), Vătafu Carmencita (85), cl. VII Condoroțeanu Carmen (204), Dron Lorena (470), Gerea Cătălina (129), Ispas Ioana (243), Mitru Simona (375), Moise Robert (150), Neagu Cristina Paula (129), Sandu Ciprian (154), Voica Cristina (266);

BACĂU (BACĂU) Ș.g.5 cl. V Preda Radu (58); Ș.g.18 cl. V Raveica Claudiu (140), Sîrbu Ionuț (180), Sova Clement (113), Udreanu Simona (154), c.l. VI Niculescu Andreea (70), Ursache Ioana (133), cl. VIII Camber George (110), Jămneală Tiberiu (120); Ș.g. 19 cl. V Godeanu Veronica (118), cl. VI Barzaghideanu Mihaela (88), Luca Simona (79); Lic. „G. Bacovia" cl. IX Bălăceanu Mona (16), Enășea Mihnea (102), Panțiru Mariana (25), Proca Silvia-Cristina (53); fără mențiune de școală: Lucanu Gilda (100), Tesau Paula Cristina (72); **BAIA MARE (MARAMUREȘ)** Ș.g.4 cl. VI Zoicaș Mihaela (95); **BEIUȘ (BIHOR)** Ș.g. Beiuș cl. VI Herman Ciprian (200), cl. VII Cseterky Cecilia (90), Sabău Călin (108), Suvaina Cătălin (100); Lic. „S. Vulcan" cl VI Hoza Alina Maria (210); cl. VII Georgeta Florina (100), Gherle Dorina (100), Halasz Ioan (100), Szabo Cătița 86); Toda Ionela (100); **BÎRLAD (VASLUI)** Ș.g.8 cl. V Giurgea Dragoș (105); Grosu Mihaela (114); Ș.g. 11 cl. V Ciobanu Cerasela Lăcrămioara (10), Lic. „Gh. Roșca Codreanu" cl. IX Cotoranu Beatrice (60); Ghelaru Romeo (59); Jora Larisa (66); **BLAJ (ALBA)** fără mențiune de școală cl. VIII Nenchea Alina (93); **BOTOȘANI (BOTOȘANI)** Ș.g.7 cl. VI Axinxius Cătălina (80), Mustață Magdalena (160), Lăcătuș Eduard (20), cl. VII Apetrei Gabriel (89); Ș.g.12 cl. V Petruc Daniel (70), Strugariu Alina (80), Tătăringă Gabriela (90); cl. VI Andone Carmen-Maria (90), Hangea Bianca (60); Ș.g.13 cl. V Atodiresei Vasile (43), cl. VI Paraschiv Dorel (110), Piuleac Corneliu (110); **BOZOVICI (CARAȘ-SEVERIN)** Lic. „E. Murgu" cl. IX Nercea Aurica (112);

BRĂILA (BRĂILA) Ș.g.6 cl. V Mușat Laura Liliana (25); Ș.g.7 cl. VII Tonea Răzvan (40); Ș.g.11 cl. VI Stanciu Viorica (70); Ș.g.17 cl. VII Boboc Mihaela (117); Ș.g.23 cl. VI Gheorghe Mariana (113), cl. VII Brăilescu Alina (87), Dovlețiu Emanuela (98); Ș.g.29 cl. V Stan Luminița-Sorina (40), cl. VI Motora Mihai (80), Useatu Cristian (74); **BRAȘOV (BRAȘOV)** Ș.g.5 cl. V Cojocaru Aurelian (48), Polroviță Ioana (10), cl. VI Cristescu Dana (49), cl. VIII Cenușe Cristina (50), Dobromir Cătălin (50), Rotaru Claudiu (50), Spiridonescu Răzvan (50), Szasz Adana (50); Ș.g. 19 cl. V Manea Rodica (60); **BUCUREȘTI** Ș.g.5 cl. III Grama Marcel (280); Ș.g.56 cl. VIII Boxoman Loran (10); Ș.g.70 cl. V Lepădatu Adrian Constantin (120), cl. VI Dumitru Alina (98), Fomiu Tamara-Elena (109), cl. VII Mihai Andreea (149), Sălăgean Loreta (210); Ș.g.117 cl. V Bacalu Dragoș (120), Boboc Steluța (64), Iatan Veronica (100), Stoica Andreea (180); Ș.g.142 cl. VII Dragotă Mugur Ștefan (69), Dragotă Victor (117); Ș.g. 156 cl. VI Munteanu Anca (130), Rădulescu Anca (80); Ș. g. 196 cl. V Lixandru Mădălina (70), cl. VI Lixandru Cătălin (85); Lic. ind. „Caragiale" cl. IX Amza Raluca (54), Mantu Adrian (80); Lic. ind. 35 Angheluță Marian (70), An onescu Mădălina (110), Bobîrnac Vasile (80), Boboșilă Alexandru (80), David Valentin (70), Dinuț Daniela (70), Frînculescu Estera (75), Ganea Nicoleta Luiza (75), Iliescu Delia Minodora (60), Ion Ane Mari Denis (70), Oancea Raluca Antoanela (75), Pătru Roxana Luminița (80), Pitiș Cristina (80), Tăndoreanu Claudia (80), Vlad Geanina Mihaela (75);

Scanned with OKEN Scanner

CARACAL (OLT) Ş.g.2 cl. V Bobaru Mihaela (50), Cosacaru Dorian (90), Hoara Mădălina (89), Nica Felicia (89), Obertin Maria (75), Stan Aurel (23), Sucă Clara (95), Veg Mara (90), cl. VI Antonie Mihaela (103), Florescu Sandu (115), Oarcea Cornel (115), Popescu Claudiu (98), Stan Lucreţia (120), Titirigă Aurora (111), cl. VII Granţa Lorellay (118), Dalcu Monica (214), Tătaru Adela (150), Timoc Daniel (59), Vega Mara (70), cl. VIII Stan Narcis (72); fără menţiune de clasă Drăghici Dan (29); Ş.g.5 cl. V Badea Nicoleta (65), Căroi Dana (85), Dulcea Aristide (120), Dumitrescu Flaviu (88), Heson Cătălin (55), Luca Remus (107), Papuc Mihai (45), Pănescu Lucica (79), Onescu Elena (66), Roşu Carmen (65), cl. VI Badea Nicoleta (125), Bădică Valentin (168), Băjenaru Claudia (89), Boata Aurora (110), Bogoi Margareta (33), Bordei Cristina (130), Brincoveanu Mihai (70), Costăchescu Oana (50), Duica Adelin (80), Jianu Anca (109), Bicman Dan (80), Stan Cornel (51), cl. VII Duica Adelin (100), Firoiu Adriana (200), Stoenescu Cristi (80), cl. VIII Chiţimia Emanuel (60), Cuc Florin (148), Firoiu Adriana (148), Rusu Maria (101); fără menţiune de clasă: Maciuca Claudia (45); Ş.g.6 cl. V Marcu Doru (85), Dogaru Mihaela (8), cl. VII Nedelciuc Doina (85); fără menţiune de şcoală: cl. V Dumitru Bianca (90), cl. VI Onescu Irina (100), cl. VII Diaconu Mihaela (210), Pavel Elena (70); Lic. ind. 2 cl. XI Turcaş Anca (168); **CARANSEBEŞ (CARAŞ-SEVERIN)** Ş.g. 8 cl. V Antonescu Gabriel (70), Botoş Mihaela (70), Neacşu Cătălina (80), Nedelcu Daniela (13), Obirlese Alina (90), cl. VI Paltean Simona (87), Rusu Bogdan (150); Lid. ped. cl. VI Borozan Dorin (184), cl. VII Scheusan Ioan (80), Spunei Cătălina (70); **CĂLĂRAŞI (CĂLĂRAŞI)** Ş.g.1 cl. V Constantinescu Mădălina (80), Liţu Sorin (45), cl. VI Baceanu Daniel (35), Oprea Cerasela (90); Ş.g. 4 cl. V Bolhoacă Florin (20), Chiriac Daniela (160), Cimpulungeanu Anca (120), Toader Mariana (97), Trandafir Răzvan (150), cl. VI Chirilă Ilona (144), Dumitru Luciana (250), Niţu Claudiu (100), cl. VII Chivu Daniela (109), Năstase Florin (80); Ş.g. 10 cl. VII Cişmaşu Cristina (60), Dumitrescu Vasile (38), Simion Săndica (47); fără menţiune de şcoală şi clasă: Ileaş Petronel (20); **CĂLINEŞTI (TELEORMAN)** Ş.g. cl. V Tone Mihaela (32); **CEAURU (GORJ)** Ş.g. cl. VI Tita Ioana (60);

CEHU SILVANIEI (SĂLAJ) Ş.g.cl. III Drulea Loredana (80), Racolţa Monica (75), cl. V Pantea Cristian (100), Sabău Anica (80), Scurt Natalia (93), Vaida Mariana (85), Vlaicu Ioan (90), cl. VI Borza Silviu (120), Kovacs Dina (75), Merce Monica (100), Papp Julia (140), cl. VII Oros Monica (76), Racz Nora (100); Lic. ind. cl. XI Pop Simona (480); **CELARU (DOLJ)** cl. VII Voicu Marius (100); **CERNAVODĂ (CONSTANŢA)** Ş.g.1 cl. VI Haranga Liliana (35); Ş.g.2 cl. VI Dobre Ion (65); Ş.g.3 cl. V Amaridei Cristian (80), Hânsă Tiberiu (238), cl. VI Gherlan Nicoleta (267), cl. VII Goadă Costin (150), Dăineanu Emilia (80), Nicolae Alina (138), Vlădăreanu Simona (70); **CIUPERCENI-VLĂSIEI (DOLJ)** cl. VII Dinu Gabriela (80); **CIMPIA-TURZII (CLUJ)** Ş.g.5 cl. VI Fujor Flaviu (30), Lic. ind. Mare Liviu (96); **CIMPINA (PRAHOVA)** Ş.g.2 cl. VII Crimpita Anca (43); Ş.g 4 cl. VI Mola Ioana (245), cl. VII Budală Adrian (117), Crăciun Cosmin (83); Lic. ind. 5 „N. Grigorescu" Bosinceanu Raluca (120), Carzol Anca (73), Preda Mihe (110), Stoicescu Laura (118), Sora Monica (95), Toader Anca (119), Vasiliu Mircea (100), cl. X Pintea Felicia (120), cl. XI Năstase Daniela (170); Lic. mat. fiz. 2 cl. X Glorbă Mircea (35), Iurian Marius (200); fără menţiune de şcoală şi clasă: Gănescu Eleonora (23), Puşcaş Emil (68); **CIMPULUNG MOLDOVENESC (SUCEAVA)** Lic. militar „Ştefan cel Mare" Andrei Constantin (155), Pavel Vasile (48), Svănescu Marius (100), Ciliuc Florin (42); **CIMPULUNG MUSCEL (ARGEŞ)** Ş.g.3 cl. VI Ionescu Raluca (28), cl. VIII Serboiu Crenguţa (150);

CLUJ-NAPOCA (CLUJ) Ş.g.1 cl. VII Niţichi Doina (120), Ş.g.2 cl. VI Crivu Cristian (18), Martâroveschi Larisa (85), Negoescu Diana (98); Ş.g.6 cl. V Iancu Daniela (40), Mieläuş Ioana (65), Morar Voichiţa (58), Netea Ioan (65), Toca Vlad (60), cl. VI Achimaş Sorin (112), Moldovan Mădălina (70), Netea Maria (100); Ş.g.16 cl. V Coroş Corina (110); Ş.g.18 cl. V Nistor Codruţ (49); Ş.g.21 cl. VII Derzsi Gabriela (40); Ş.g.29 cl. V Ruja Adrian (200); Ş.g. Cuzdrioara cl. V Bogdan Marius (36); Lic. „E. Racoviţă" cl. V Franţiu Cosmin (90), cl. VI Lupşa Luciana (230), Mihoc Cristina (228), cl. VIII Frenţiu Alin (76), cl. X Dan Coman (132); Lic. ind. „G. Coşbuc" cl. VI Domnariu Ramona (35), cl. VII Boila Paula (240), Breckner Brigitte (197), Matei Simona (138), cl. VIII Naya Hodor (245); Lic. şt. naturii cl. V Ciugudeanu Alina (150), cl. VI Tuder Stancioiu (30); Lic. arte plastice cl. V Fulop Ilona (65), Gaciu Ardelean Mihaela (85), Lupa Sidonia (68), Pojar Gheorghe (65), Rodila Paul (66), cl. VI Puşcaş Daniel (61); **COMĂNEŞTI (BACĂU)** Ş.g. Avătăriţei Viviana (100); **CONSTANŢA (CONSTANŢA)** Ş.g.2 cl. VII Crisfocea Corina (130), Tiriboiu Magdalena (60); Ş.g.3 cl. VII Dăineanu Emilia (160); Ş.g.5 cl. VII Halici Mirela (96); Ş.g.7 cl. V Naciu Veronica (10); Ş.g.11 cl. V Rusu Mihaela (110); Ş.g.12 cl. V Enică Alina (100), cl. VI Avramescu Andreea (140), Busu Octavian (93), Iancu Lucian (149), Mirea Laurenţiu (137), Neacşu Mihaela (94), Ologu Alina (140), cl. VII Filip Mirela (120), cl. VIII Grigore George (101); Ş.g.16 cl. V Bucur Violeta (106), Negruţ Emanuela (110), cl. VI Abramou Anca (100), Asanache Monica (50), Comşa Roxana (150), Dima Cristi (71), Duşu Marinela (88), Panţiru Liviu (96), Stroe Ecaterina (76), cl. VII Costea Claudia (80), Ghiu Daniel (100), Ghiu Melania (110), Tănase Diana (101), Ziadin Filis (72), cl. VIII Anefi Kyamuran (120); fără menţiune de clasă: Comşa Roxana (105), Marinescu Dănuţ (79); Ş.g. 17 cl. VI Georgescu Laurenţiu

Scanned with OKEN Scanner

(28) ; Ş.g. 28 cl. V Ali Bianca (28), Lazăr Liliana (74), Reşit Giunsel (70), cl. VI Haşoti Antoanela (100), Voicu Doina (58) ; Ş.g. 32 cl. VI Holban Ionica (22), cl. VII Corcescu Daniel (127), Palanga Claudia (217) ; Ş.g. 34 cl. V Tudoran Valentina (55) ; Ş.g. 38 cl. V Negulescu Alina (67), Ş.g.40 cl. VI Damian Cătălin (117) ; Lic. „Mircea cel Bătrîn" cl. X Cărtuţa Florian (100), Comănici Mihăiţă (80). cl. XI Nicolescu Bogdan (244), Sandu Lucian (234) ; Lic. ind.10 cl. IX Dumitrescu Dan (50), Vernic Gheorghe (150) ; fără menţiune de şcoală şi clasă : Manole Cristian (80), Niţică Cristian (100), Pîrvan Dragoş (140) ; **CORABIA** (OLT) Ş.g. 3 cl. VI Vărzaru Daniel (70) ; **COSTEŞTI** (ARGEŞ) Ş.g. cl. V Iordache Simona (78), cl. VI Constantinescu Alina (110), cl. VIII Minică Virginia (98), Pătru Daniela (98) ;

CRAIOVA (DOLJ) Ş.g.2 cl. VIII Savin Horaţiu (100) ; Ş.g·9 cl. V Guţa Mădălin (45), Mateescu Carmen (10), Naidin Jana (90), cl. VI Mateescu Radu (100), cl. VII Demetrescu Cristian (85), Galbenu Monica (295), Opran Mihaela (94) ; Ş.g.11 cl.VI Buricea Adina (140) ; Ş.g.18 cl. VII Gîla Daniela (74), Mitruţ Gabriela (100) : Ş.g.21 cl. V Radu Mihai (98), Ştefănescu Anca (107), cl. VI Amza Alin (78), Bărbulescu Anca (119), Bolborea Mariana (100), Bucă Dan (128), Buşoiu Lavinia (84), Covaldji Ovidiu (150), Mateescu Anca (87), Matei Iulia (170), Pană Cătălin (158), Popescu Marilena (62), Radu Mihai (119), Riza Adrian (120), Săndoiu Cristina (110), Săndulescu Cosmin (73), Sbârnă Silvia (107). Stoicescu Irina (109), Tean Claudiu (119), Voicu Victor (55), Voinescu Cătălin (99), cl. VII Dinu Alin (100), Petulescu Cosmina (94), Popescu Radu (120) ; Ş.g.22 cl. V Butoi Emil (65), Ştefan Laurenţiu (65), cl. VI Diaconu Mircea (90), Popescu Cristina (110), Predoi Mihaela (152), cl. VIII Pavel Mădălin (137) ; Ş.g.24 cl. V Vînătoru Cristian (75) ; Ş.g.30 cl. VII Cruceru Aurelian (120), cl. VIII Dumitru Adina (101), Săndulescu Gheorghe (110) ; Ş.g.31 cl. VI Drăgancea Mădălin (194), Lupşoiu Sorin (329), cl. VII Brînzan Lavinia (80), Drăgancea Daniela (45) ; Ş.g.32 cl. V Cituroianu Simona (40), Cocheci Titela (90), Coşoveanu Costinel (70), Dajma Cornel (56), Deaconescu Ionel (80), Dolana Laurenţiu (75), Ilie Daniela (80), Neda Adrian (70), Popescu Costel (50), Preda Paula (65), Romcea Cristinel (87), Vasile Mihaela (55), Uncărescu Ioana (90), cl. VI Amnar Viorica (47), Ancuţa Ionel(90), Anghel Daniela (150), Birţă Rodica (109), Chircu Florentina (63), Dăruială Ionela (110), Dimulescu Elena (70), Filimon Claudiu (32), Ghiţulescu Laurenţiu (40), Nicola Dorina (70), Reda Graţiela (63), Scărlătescu Mirela (120), Smoen Florina (56), Telteu Dan (94), Vanţă Gabriel (75), Vîlcan Manuela (68), Vlădianu Adrian (90), cl. VII Chircu Florentina (51), Dochia Laurenţiu (96), Ghiţă Aurelia (100), Lillu Nicoleta (98). Lupu Mihaela (165), Militaru Adrian (120), Militaru Liliana (81), Mitrache Laurenţiu (180), Novac Valentin (118), Romcea Gabriela (97), Stanel Sorin (88), Şerban Marinela (100), Ulei Nadia (69), Vasile Cristina (120), cl. VIII Preoteasa Emil (55) ; fără menţiune de clasă : Mateescu Mihaela (100), Iancu Adriana (99) ; Ş.g .33 cl. VI Simion Claudiu (95) ; Ş.g.35 cl. V Buricea Mihaela (75) ; Lic . milit.. „T. Vladimirescu" Rada Daniel (146) ; Lic. „N. Bălcescu" cl. VIII Farcaşu Octavian (80), Segărceanu Laura (608), cl. IX Chiurtu Ruxandra (100), Ozun Felicia (100), Tătar Radu (147), Vasilcanu Radu (120), cl. X Tatar Radu (310), cl. XI Toca Livia (150) ; Lic. „Fr. Buzeşti" cl. VIII Chiriţoiu Despina (110), Pană Bogdan (110), cl. IX Savin Horaţiu (175), cl. X Radu Caius (200) ; Lic. ped. cl . V Dumitrescu Claudia (150), Lazăr Daniela (89) ; Lic. filolog. ist. cl. VIII Ciurtu Ruxandra (60) ; fără menţiune de şcoală şi clasă : Corolovici Sorana (50), Ghiţulescu Laurenţiu (57), Petre Gabriel (180), Rebega Florica (70), Trandafir Aurelian (100), Zamfir Eugen (150) ;

CRASNA (SĂLAJ) Ş.g.cl. V Baciu Mariana (94), Hălădea Mona (70), cl. VIII Fehervari Elisabeta (290) ; **CRISTOLŢ** (SĂLAJ) Ş.g. cl. V Dimga Maria (46), Ilieş Iordan (61) ; **CUGIR** (ALBA) Ş.g.2 cl. V Aldea Monika (20), Glesnea Mihai (43), Glunoi Andreea (50), Neagu Simona (60), Rurac Lăcrimioara (75), Stoica Adina (50) ; Ş.g.3 cl. V Biruţ Daniel (54), Milea Cristina (32), Mumătă Cristina (81), Stănescu Claudia (77) ; **CURTEA DE ARGEŞ** (ARGEŞ) Ş.g.1 cl. VI Nan Marius (73) ; Ş.g.2 cl. V Sandu Cătălin (80) ; Ş.g.4 cl. V Badea Marilena (85), Ilea Irina (55) ; Ş.g.5 cl. VI Pletea Marian (128), Velea Ana (120), cl. VII Debra Adrian (88). Niţu Sorin (120) ; Ş.g.6 cl. V Glăman Gianina (80), cl. VI Călin Budan (70) ; Lic. „Vlaicu-Vodă" cl. X Tuţa Diana (180), Gobej Adrian (130) ; Lic. ind. 1 cl. X Muscalu Călin (120) ;

DARABANI (BOTOŞANI) Ş.g.1 cl. V Aroşoaie Mihaela (30), Bivoleanu Diana (88), Cîrneală Ştefan (30), Maxim Otilia (28), Mihai Lucian (50), Onciu Gabriela (98) ; **DEJ** (CLUJ) Ş.g.1 cl. V Marin Carmen Liana (55), Mureşan Maria Simona (55) ; Ş.g.3 cl. V Măguren Liana (81), Oros Cristiana (64), vl. VI Cîmpan Luminiţa (89), Chiuzan Corina (112), Deneş Cristian (126), Pop Remus (140), Zanta Ovidiu (88), cl. VII Iosip Gemma (100), Incze Reka (90), Rusu Monica (80), Unguraş Ioana (204), Văscan Diana (90), cl. VIII Coroian Camelia (70) ; **DIRMĂNEŞTI** (ARGEŞ) Ş.g.cl. V Marin Denisa (70) ; **DOROHOI** (BOTOŞANI) Ş.g.5 cl. V Bănilă Nicoleta (64), Cotofrei Oana-Maria (49) ; **DRĂGĂNEŞTI OLT** (OLT) ,Ş.g.1 cl. V Dumitru Ancuţa Eugenia (120), Jianu Viorel (88) ; **DRĂGĂŞANI** (VÎLCEA) Ş.g. 1 cl. VI Crăeşcu Monica (110) ; **DROBETA-Tr. SEVERIN** (MEHEDINŢI) Ş.g.2 cl. VII Cenolu Clara (163) ; Ş. g. 3 cl.VI Andolu Aniţa (69), Ion Gabriel Marian (100) ; Ş.g.4 cl. VI Alexandrescu Amalia Ana (60), Fusun Mirela (105) ; Ş.g.9 cl. VI Borlan Silvia (9), cl. VII Guşe Pompiliu (60) ;

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XCII nr. 1 — ianuarie 1987

EDITORIAL

de Acad. N. Teodorescu

Cu acest număr, care marchează un An Nou, anul 1987, Gazeta Matematică păşeşte în cel de-al 92-lea an de existenţă. Gîndurile noastre se îndreaptă spre cei peste 100.000 de cititori urindu-le din inimă sănătate desăvîrşită prin putere de muncă, prin succese depline în stăpînirea şi fructificarea matematicii. Tot o dată adresăm calde urări şi mulţumiri colaboratorilor şi autorilor de articole, note şi probleme, cărora revista le datorează însăşi ţinuta cu care se înfăţişează cititorilor din ţară şi chiar din alte ţări, unde este căutată şi apreciată.

Urmînd îndemnurile şi orientările conducerii Societăţii de Ştiinţe Matematice din R. S. România, redacţia se străduieşte să dea Gazetei Matematice o structură şi o prezentare pe măsura ţelurilor urmărite de a atrage şi a stimula tineretul nostru în activitatea creativă. Matematica, deşi prezintă după opinia unora unele dificultăţi de înţelegere, are calitatea de a da satisfacţia creativităţii timpurii celor care o pătrund şi o iubesc. Aşa se explică faptul că rubrica permanentă de probleme pentru elevii cursului primar se bucură de adeziunea entuziastă a mii de elevi şi a învăţătoarelor şi învăţătorilor lor.

În ceea ce priveşte elevii claselor gimnaziale, din rîndul lor noi înregistrăm cei mai numeroşi rezolvitori, iar unii devin şi remarcabili propunători de probleme.

Elevilor liceelor, revista le oferă probleme care urmăresc să-i ajute la examenele de treaptă şi apoi de admitere în învăţămîntul superior.

În decursul anului 1986 am urmărit de asemenea ca articolele şi notele publicate să trezească interesul cititorilor pentru a-i stimula să rezolve şi să propună probleme. O atenţie deosebită a fost acordată articolelor de prezentare a problemelor date la diverse concursuri şi olimpiade, precum şi în taberele de matematică organizate în diverse centre.

Printre rubricile destinate problemelor de concurs semnalăm pe cele preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu, precum şi pe cele pregătitoare pentru O.I.M. şi O.B.M.. Prin acestea Gazeta Matematică răspunde unor cerinţe de prestigiu şi aduce servicii preţioase pregătirii loturilor noastre naţionale pentru olimpiadele internaţionale şi olimpiadele balcanice. Dar să nu uităm nici olimpiadele noastre naţionale cu cele trei faze: locală, judeţeană şi republicană, cărora revista le consacră numeroase probleme.

O rubrică pe care o găsim în fiecare număr este cea a problemelor pentru concursul anual al rezolvitorilor G. M., care se ţine în fiecare an, concurenţii fiind selecţionaţi într-o primă etapă pe baza rezolvărilor date acestor probleme. În acest mod se păstrează între conducerea S.S.M., comisiile de selecţie şi de concurs şi concurenţi o legătură extinsă de-a

Scanned with OKEN Scanner

lungul întregului an în care aceştia concurează, ceea ce este o trăsătură caracteristică specifică acestui concurs, pe care nu o mai întîlnim la altele. Este o afirmare afectivă a legăturilor permanente dintre G.M. şi cititorii ei.

O altă rubrică, ce cîştigă din ce în ce mai mult adeziunea cititorilor, este cea a problemelor de informatică, pe care autorii acestora o leagă mereu mai strîns de însăşi metodele şi tehnicile matematice şi la care redacţia primeşte în ultimii ani soluţii şi probleme propuse frumoase.

O atenţie deosebită este acordată problemelor comentate, ceea ce se reflectă în special în prezentările soluţiilor problemelor date la diverse concursuri, prezentări care au un caracter metodologic, ce trebuie subliniat. În general, soluţiile problemelor rezolvate, care nu pot fi atît de numeroase cîte am dori să oferim cititorilor, au caracter metodologic, urmărind că îndrume pe rezolvitori în găsirea metodelor adecvate şi cît mai eficiente de rezolvare a altor probleme.

Vom relua concursul de probleme propuse cu „motto" pentru a pune la dispoziţie comisiilor concursurilor de matematică problemele primite, în vederea introducerii acestora printre problemele propuse în fazele succesive ale concursurilor. Dăm astfel posibilitatea unui număr însemnat de propunători de a concura în condiţii de anonimat, care au fost apreciate şi au dat rezultate remarcabile în anii trecuţi.

Ca activitate editorială ne propunem să realizăm Culegerea de probleme pentru clasele XI—XII şi concursurile de admitere în învăţămîntul superior, care a suferit o amînare regretabilă prin întîrzierea apariţiei părţii a doua a Culegerii pentru clasele I—VIII.

În încheierea acestui editorial, trebuie să mulţumim încă o dată tuturor colaboratorilor pentru preţiosul sprijin adus în realizarea acestei reviste care urmează o veche şi fecundă tradiţie de atragere şi stimulare a tineretului pentru activitatea matematică, solicitîndu-le în continuare concursul pentru a-i păstra şi creşte mereu prestigiul.

CONCURSUL ANUAL AL GAZETEI MATEMATICE, EDIŢIA A VII-A, CURTEA DE ARGEŞ, 25 August 1986 — 5 septembrie 1986

prezentare de Marcel Ţena

I. ENUNŢURI

Proba de raţionament matematic din 1 septembrie 1986

Clasele a IX-a şi a X-a

1. Vom numi *adiacente* două triunghiuri situate în acelaşi plan şi avînd o latură comună (pe care o vom numi *latură de adiacenţă*), vîrfurile necomune fiind situate de o parte şi de alta a laturii de adiacenţă.

a) Să se determine configuraţiile formate din patru triunghiuri echilaterale în care fiecare triunghi este adiacent cu cel puţin un alt triunghi;

b) Să se demonstreze că în fiecare configuraţie numărul laturilor de adiacenţă este egal cu 3;

c) Din care dintre aceste configuraţii se poate construi un tetraedru regulat alegînd unul din triunghiuri ca bază şi efectuînd una sau mai multe rotaţii convenabile ale celorlalte trei triunghiuri în jurul laturilor de adiacenţă?

d) Să se demonstreze că numărul minim de rotaţii necesare şi suficiente pentru construirea unui asemenea tetraedru regulat este egal cu 3 şi să se determine măsurile unghiurilor de rotaţie ale triunghiurilor în jurul axelor respective de rotaţie.

Acad. Nicolae Teodorescu

2. Spunem că o submulţime $M \subset \mathbb{C}$ are proprietatea (P) dacă

$$(\forall)\ x, y \in M \Rightarrow x + y \in M \text{ şi } xy \in M.$$

a) Demonstraţi că dacă A are proprietatea (P) şi $\mathbb{R} \subset A \subset \mathbb{C}$, atunci $A = \mathbb{R}$ sau $A = \mathbb{C}$;

b) Daţi exemplu de două mulţimi B şi C care au proprietatea (P), dar care verifică incluziunile stricte: $\mathbb{Z} \subset B \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset C \subset \mathbb{R}$.

Marcel Ţena

3. Fie M, N, P punctele în care bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului. Să se arate că perimetrul triunghiului MNP este mai mare sau egal cu perimetrul triunghiului ABC.

Mircea Lascu

Clasele a XI-a şi a XII-a

1. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ definim şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = \sin 2^n x$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$. Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă $x \in \left\{ \frac{k\pi}{2^p} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N} \right\}$.

Páll Dályay

2. Fie $d > 1$ un întreg liber de pătrate. a) Să se determine inelele A cu proprietatea $\mathbb{Z} \subset A \subset \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, operaţiile din A fiind cele induse de adunarea şi înmulţirea din $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$;

b) Să se determine inelele B cu proprietatea $\mathbb{Q} \subset B \subset \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, operaţiile fiind cele induse de adunarea şi înmulţirea din $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Marcel Ţena

3. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie uniform continuă pe I. Definim funcţia $\delta: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ aşa încît pentru fiecare $\varepsilon > 0$,

$$\delta(\varepsilon) = \sup \{\delta > 0 \mid (\forall)\ x', x'' \in I,\ |x' - x''| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon\}.$$

Să se demonstreze că:

a) Pentru fiecare $\varepsilon > 0$ avem inegalitatea $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} |x - y| + \varepsilon$, $(\forall) x, y \in I$;

b) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ dacă şi numai dacă funcţia f nu este lipschitziană pe I.

Ciprian Neacşu

Proba de tehnică matematică din 3 septembrie 1986

Clasele a IX-a şi a X-a

1. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 1$ sau $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n \leqslant 1$, notăm $A = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) - n^2$, $B = n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$. Să se determine $\max(A, B)$.

Mircea Lascu

2. Se consideră triunghiul isoscel ABC în care $AB = AC$.

a) Să se construiască cu rigla şi compasul două cercuri secante şi congruente, de centre O_1 şi O_2, aşa încît A să fie unul din punctele de intersecţie a celor două cercuri, iar B şi C să fie respectiv punctele în care segmentul (O_1O_2) intersectează cercurile de centre O_2 şi O_1;

b) Notînd $BC = 2a$ şi $d(A, BC) = h$, să se exprime în funcţie de a şi h raza R a celor două cercuri congruente, precum şi raza r a cercului tangent simultan segmentului (BC) şi arcelor $\overset{\frown}{AB}$ şi $\overset{\frown}{AC}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se construiască cu rigla și compasul cercul de rază r de la punctul b).

Acad. *Nicolae Teodorescu*

3. Fie $a, b \in \mathbb{R}_+$ două numere fixate. Să se determine locul geometric al punctelor din plan $M(x, y)$ avînd proprietatea $\sin(a|x-a|+b|y-b|)=0$.

Nicu Hîrjoghe

Clasele a XI-a și a XII-a

1. Fie p număr prim pozitiv așa încît $p^2 = x^2 + y^2$, unde $x, y \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că există $u, v \in \mathbb{N}^*$ așa încît $p = u^2 + v^2$.

Marcel Țena

2. Fie a_n numărul tuturor minorilor asociați unei matrici pătratice de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a_n}$.

Ștefan Alexe și *Sorin Simion*

3. Dacă funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sînt continue și verifică condițiile:

a) f este periodică și neconstantă; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \infty$,

atunci $f \circ g$ nu este periodică.

Pall Dalyay

II. SOLUȚII

Proba de raționament matematic

Clasele a IX-a și a X-a

1. a) Notăm cu 1,2,3,4 suprafețele triunghiulare asociate celor patru triunghiuri echilaterale congruente ale configurației. Este clar că orice două triunghiuri echilaterale adiacente dau o configurație de tipul din fig. 1. Dacă formăm o configurație cu trei triunghiuri echilaterale plecînd de la cea cu două triunghiuri din fig. 1, înseamnă să mai adăugăm un triunghi echilateral care să aibă drept latură de adiacență $[AB]$ sau $[BC]$ sau $[AB']$, sau $[B'C]$. Se constată ușor că toate patru configurațiile sînt echivalente topologic cu cea din figura 2. Dacă formăm o configurație cu patru triunghiuri echilaterale, plecînd de la cea cu trei triunghiuri echilaterale din fig 2, înseamnă să mai adăugăm un triunghi echilateral care să aibă drept latură de adiacență $[AB]$ sau $[BC]$ sau $[CA']$ sau $[A'B']$ sau $[AB']$. Se constată că cele două configurații în care suprafața triunghiulară 4 are drept latură de adiacență $[AB]$, respectiv $[A'B']$ sînt echivalente topologic; la fel, cînd laturile de adiacență pentru suprafața triunghiulară 4 este $[BC]$ sau $[CA']$. În concluzie rămîn trei configurații distincte și anume cele din figura 3.

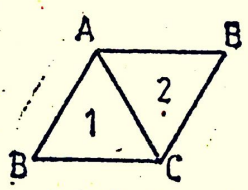


Fig. 1

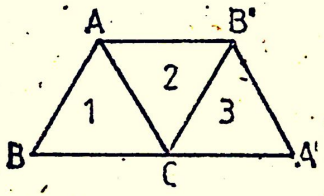


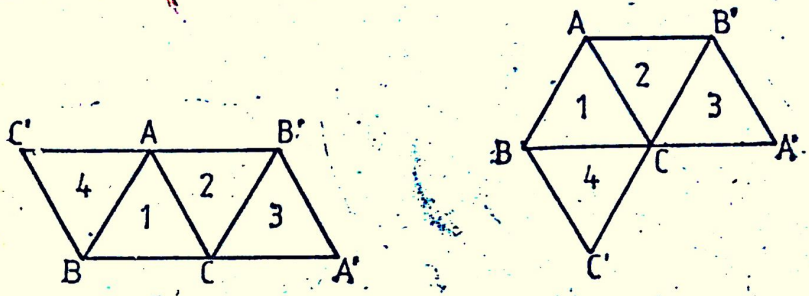
Fig. 2

b) Se constată ușor că în fiecare din configurațiile I, II, III din fig. 3 numărul laturilor de adiacență este egal cu 3.

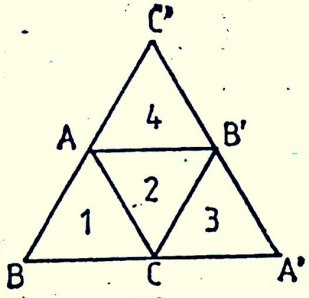
c) Observăm că într-un tetraedru fiecare vîrf al tetraedrului aparține exact la trei fețe. De asemenea, prin rotațiile pe care le vom efectua, cele patru suprafețe triunghiulare 1,2,3,4 devin fețele unui tetraedru regulat. Deoarece în configurația II vîrful C aparține tuturor suprafețelor triunghiulare 1,2,3,4, deducem că din această configurație nu poate

Scanned with OKEN Scanner

rezulta un tetraedru regulat. Vom arăta în continuare că din configurațiile I și III se poate forma un tetraedru regulat. Pentru a înțelege mai ușor acest lucru, vom considera *„problema inversă"* a desfășurării unui tetraedru regulat și vom vedea că aceasta se poate efectua în două moduri, ducînd respectiv în configurațiile I și III. Dacă $[VABC]$ este un tetraedru regulat, rotind fețele laterale $[VAB]$, $[VBC]$, $[VCA]$ respectiv în jurul dreptelor AB



I



III

Fig. 3

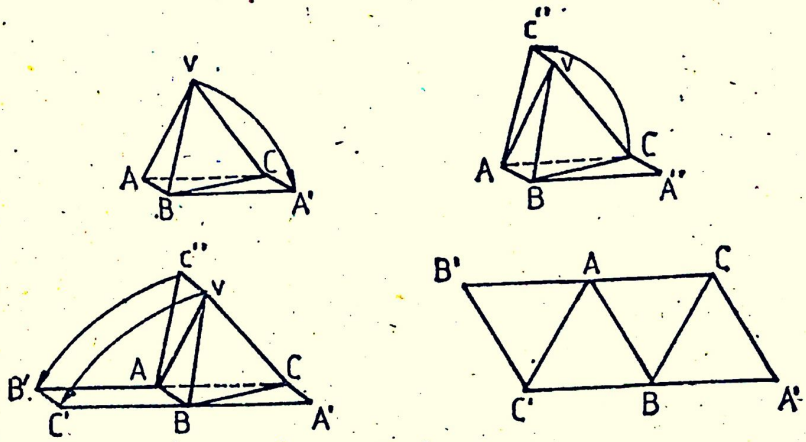


Fig. 4

Scanned with OKEN Scanner

BC, CA pînă cînd punctul V ajunge de fiecare dată în planul (ABC), obținem configurația III. Acesta a fost primul mod. Al doilea mod de desfășurare a tetraedrului $[VABC]$ este următorul: rotim fața $[VBC]$ în jurul dreptei BC pînă cînd punctul V ajunge în planul (ABC) și fie A' transformatul prin această rotație a punctului V; rotim acum fața $[VAC]$ în jurul dreptei AV pînă cînd punctul C ajunge în planul (VAB) și fie C'' rotitul lui $C(C'' \text{ și } B$ sînt de o parte și de alta a dreptei $AV)$; în sfîrșit, rotim planul $(ABVC'')$ în jurul dreptei AB pînă cînd punctele V și C'' ajung în planul (ABC) respectiv în pozițiile C' și B'. Se obține în acest fel configurația 1. Etapele acestui al doilea mod sînt indicate în fig. 4.

d) Analizînd cele două moduri de desfășurare a tetraedrului regulat descrise la punctul c) se constată că fiecare din ele conține cîte trei rotații axiale. Deoarece pentru a ajunge de la configurațiile I respectiv III la un tetraedru regulat procedăm invers desfășurării, deducem că sînt necesare și suficiente pentru aceasta trei rotații axiale. Măsura oricărui astfel de unghi de rotație este suplementul măsurii unui unghi diedru al tetraedrului regulat, adică $\pi - \arccos\frac{1}{3}$.

Soluții bune au dat elevii *Cătălin Zara*, cl. a X-a Lic., „Ștefan cel Mare" Suceava; *Bogdan Romilă*, cl. a IX-a, Lic. „C. Negruzzi" Iași; *Octavian Ioachimescu*, cl. a X-a, Lic. „Ștefan cel Mare" Suceava ș.a.

2. a) Fie mulțimea A cu proprietatea (P) așa încît $\mathbf{R} \subset A \subset \mathbf{C}$. Vom arăta că dacă $A \neq \mathbf{R}$, atunci $A = \mathbf{C}$. Într-adevăr, dacă $A \neq \mathbf{R}$, există $z = a + bi \in A \setminus \mathbf{R}$ cu $a \in \mathbf{R}$ și $b \in \mathbf{R}^*$. Dar $-a \in \mathbf{R} \subset A$ și atunci $-a + z \in A$, adică $bi \in A$. Cum $b \in \mathbf{R}^*$, rezultă $b^{-1} \in \mathbf{R} \subset A$ și atunci $b^{-1}(bi) \in A$, adică $i \in A$. Luînd atunci $z = u + vi \in \mathbf{C}$ arbitrar (cu $u, v \in \mathbf{R}$), avem $u, v, i \in A$, deci $z \in A$. Rezultă deci $\mathbf{C} \subset A$, adică $A = \mathbf{C}$.

b) Dacă $p > 0$ este un număr prim fixat, putem lua $B = \left\{ \frac{k}{p^s} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}, s \in \mathbf{N} \right\}$ și se verifică ușor că B are proprietatea (P) și verifică incluziunile stricte $\mathbf{Z} \subset B \subset \mathbf{Q}$. De asemenea, luînd $C = \mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, observăm că C verifică proprietatea (P) și incluziunile stricte $\mathbf{Q} \subset C \subset \mathbf{R}$.

Au dat soluții bune elevii *Cătălin Zara*, cl. a X-a Lic. „Ștefan cel Mare" Suceava; *Ștefan Andrei*, cl. a X-a Lic. ind. Buhuși; *Adrian Năstasă*, cl. a X-a Lic. „C. Negruzzi" Iași ș.a.

3. Soluție dată de elevul *Aurelian Bejancu*, clasa a X-a, Liceul „C. Negruzzi" din Iași. Fie I punctul de concurență a bisectoarelor triunghiului ABC. Patrulaterul $AMNP$ fiind inscriptibil, este convex, deci diagonalele sale se intersectează; să notăm atunci $(AM) \cap (NP) = \{D\}$. Analog, considerăm punctele $(BN) \cap (MP) = \{E\}$ și $(CP) \cap (MN) = \{F\}$. Arătăm că D, E, F sînt picioarele înălțimilor triunghiului MNP, ceea ce va însemna că I este ortocentrul acestui triunghi. Într-adevăr, observăm cu ușurință că $m(\hat{N}) = \frac{1}{2}(m(\hat{A}) + m(\hat{C}))$, iar $m(\widehat{DMN}) = \frac{1}{2} m(\hat{B})$ și atunci din triunghiul MDN rezultă $m(\hat{D}) = 180 - \frac{1}{2}(m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C})) = 90$, ceea ce arată că MD este perpendiculară pe PN. Analog rezultă $NE \perp MP$ și $PF \perp MN$. Se știe că dintre toate triunghiurile *„înscrise"* într-un triunghi dat, triunghiul ortic este cel de perimetru minim.

Deoarece DEF este triunghiul ortic față de triunghiul MNP, deducem că perimetrul triunghiului DEF este mai mic sau egal cu perimetrul triunghiului determinat de mijloacele laturilor triunghiului MNP. Perimetrul acestui din urmă triunghi este jumătate din perimetrul triunghiului MNP. Notînd cu P_{XYZ} perimetrul triunghiului XYZ avem deci inegalitatea:

$$P_{DEF} \leqslant \frac{1}{2} P_{MNP}, \qquad (1).$$

În triunghiul ANI, $[ND$ este bisectoare și înălțime, deci triunghiul este isoscel și atunci D este mijlocul segmentului (AI); analog E, F sînt respectiv mijloacele segmentelor (BI), (CI). Rezultă atunci că $P_{DEF} = \frac{1}{2} P_{ABC}$ și înlocuind în (1) obținem $\frac{1}{2} P_{ABC} \leqslant \frac{1}{2} P_{MNP}$, adică $P_{ABC} \leqslant P_{MNP}$. Cazul de egalitate are loc dacă și numai dacă DEF este triunghi median

Scanned with OKEN Scanner

pentru triunghiul MNP (adică determinat de mijloacele laturilor), adică dacă și numai dacă MNP este echilateral, deci dacă și numai dacă ABC este triunghi echilateral.

Au existat mai multe soluții, de factură trigonometrică, date de elevii *Nicusor Minculete*, cl. a X-a, Lic. ind. „Electroarges" Curtea de Argeș; *Cătălin Zara* și *Octavian Ioachimescu*, cl. a X-a Lic. „Ștefan cel Mare" Suceava; *Sanda Horhogea*, cl. a X-a, Lic. „C. Negruzzi" Iași.

Clasele a XI-a și a XII-a

1. ($\Rightarrow$). Să presupunem că șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent și să arătăm că $x \in \left\{\frac{k}{2^p}\,\middle|\, k\in\mathbb{Z},\ p\in\mathbb{N}\right\}$. Deoarece $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent, atunci și șirul $(b_n)_{n\geqslant 0}$, definit prin $b_n = a_n^2$, este convergent. Avem: $b_{n+1} = \sin^2 2^{n+1}x = 4\sin^2 2^n x\cos^2 2^n x = 4\sin^2 2^n x(1 - \sin^2 2^n x) = 4\sin^2 2^n x - 4\sin^4 2^n x = 4b_n - 4b_n^2$. Trecînd la limită în relația de recurență pe care o verifică șirul $(b_n)_{n\geqslant 0}$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{4}$. Vom analiza fiecare din aceste două cazuri.

Cazul 1: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Arătăm că există $n_0\in\mathbb{N}$ așa încît $b_{n_0} = 0$. Într-adevăr, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, există $n_0\in\mathbb{N}$ așa încît $|b_n| \leqslant \frac{3}{4}$, $(\forall)\ n\geqslant n_0$.

Atunci pentru orice $n\geqslant n_0$ avem: $|b_{n+1}| = |4b_n(1-b_n)| \geqslant 4|b_n|(1-|b_n|) \geqslant 4|b_n|\left(1-\frac{3}{4}\right) = |b_n|$, deci $|b_{n+1}| \geqslant |b_n|$, adică șirul $(|b_n|)_{n\geqslant n_0}$ este crescător. În particular avem $|b_n| \geqslant |b_{n_0}|$, $(\forall)\ n\geqslant n_0$ și trecînd la limită obținem $0\geqslant |b_{n_0}| \geqslant 0$, adică $b_{n_0} = 0$. De aici rezultă $a_{n_0} = 0$, adică $\sin 2^{n_0}x = 0$, deci $2^{n_0}x = k_0\pi$ cu $k_0\in\mathbb{Z}$, ceea ce înseamnă că $x\in \left\{\frac{k\pi}{2^p}\,\middle|\, k\in\mathbb{Z},\ p\in\mathbb{N}\right\}$.

Cazul 2: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{4}$. Arătăm că există $n_0\in\mathbb{N}$ așa încît $b_{n_0} = \frac{3}{4}$. Într-adevăr, din faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{4}$, rezultă că există $n_0\in\mathbb{N}$ așa încît $\left|b_n - \frac{3}{4}\right| \leqslant \frac{1}{4}$, $(\forall)\ n\geqslant n_0$. Aceasta se scrie echivalent $-\frac{1}{4} \leqslant b_n - \frac{3}{4} \leqslant \frac{1}{4}$, de unde $b_n \geqslant \frac{1}{2}$, sau $b_n - \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4}$, $(\forall)\ n\geqslant n_0$. Atunci:

$$\left|b_{n+1} - \frac{3}{4}\right| = \left|-4b_n^2 + 4b_n - \frac{3}{4}\right| = \left|-4\left(b_n - \frac{1}{4}\right)\left(b_n - \frac{3}{4}\right)\right| =$$

$$= 4\left(b_n - \frac{1}{4}\right)\left|b_n - \frac{3}{4}\right| \geqslant 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left|b_n - \frac{3}{4}\right| =$$

$$= \left|b_n - \frac{3}{4}\right|, \text{ deci } \left|b_{n+1} - \frac{3}{4}\right| \geqslant \left|b_n - \frac{3}{4}\right|, (\forall)\ n\geqslant n_0,$$

ceea ce arată că șirul $\left(\left|b_n - \frac{3}{4}\right|\right)_{n\geqslant n_0}$ este crescător. În particular avem $\left|b_n - \frac{3}{4}\right| \geqslant \left|b_{n_0} - \frac{3}{4}\right|$, $(\forall)\ n\geqslant n_0$ și trecînd la limită obținem $0\geqslant \left|b_{n_0} - \frac{3}{4}\right| \geqslant 0$, adică $b_{n_0} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \frac{3}{4}$. Aceasta înseamnă că $\sin^2 2^{n_0}x = \frac{3}{4}$, deci $\cos 2\cdot 2^{n_0}x = 1 - 2\sin^2 2^{n_0}x = 1 - 2\cdot\frac{3}{4} =$

$= -\frac{1}{2}$ și atunci $2\cdot 2^{n_0}x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k_0\pi$, cu $k_0 \in \mathbb{Z}$, adică $2^{n_0}x = \pm\frac{\pi}{3} + k_0\pi$. Să analizăm de exemplu cazul $2^{n_0}x = \frac{\pi}{3} + k_0\pi$, celălalt tratîndu-se analog. Pentru $t \in \mathbb{N}^*$ avem $a_{n_0+t} = \sin 2^{n_0+t}x = \sin 2^{n_0}x \cdot 2^t = \sin\left(\frac{\pi}{3} + k_0\pi\right)2^t = \sin 2^t\frac{\pi}{3}$. Observăm că restul împărțirii lui 2^t prin 6 este 2 sau 4 (căci numerele care dau restul 1 sau 5 sînt impare, iar cele care dau restul 0 sau 3 sînt multiplii de 3). Pentru acele valori ale lui t pentru care $2^t = \mathcal{M}6 + 2$ avem $a_{n_0+t} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, iar pentru acele valori ale lui t pentru care $2^t = \mathcal{M}6 + 4$ avem $a_{n_0+t} = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Aceasta arată că șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ are două subșiruri constante, convergente la limitele $\frac{\sqrt{3}}{2}$, respectiv $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci acest șir nu este convergent, contradicție cu presupunerea făcută. Așadar cazul $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{4}$ nu este posibil.

($\Leftarrow$). Dacă $x \in \left\{\frac{k\pi}{2^p}\,\middle|\, k \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}\right\}$, există $k_0 \in \mathbb{Z}$, $p_0 \in \mathbb{N}$ așa încît $x = \frac{k_0\pi}{2^{p_0}}$. Pentru $n \geqslant p_0$ avem $a_n = \sin 2^n\frac{k\pi}{2^{p_0}} = \sin 2^{n-p_0}k\pi = 0$. Așadar șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este constant începînd de la rangul n_0, deci este convergent.

Soluții bune au dat *Radu Constantinescu*, cl. a XII-a, Lic. „N. Bălcescu" București; *Iulian Grindeanu*, cl. a XII-a Lic. matem. fizică 2 Cluj-Napoca; *Marian Teliva*, cl. a XII-a Lic. „Gh. Roșca Codreanu" Bîrlad; *Mihai Popovici*, cl. a XI-a Lic. „A. Mureșanu" Dej; *Cezar Joița*, cl. a XI-a, Lic. ind. Găiești.

2. a) Fie A un inel cu proprietatea $\mathbb{Z} \subset A \subset \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ și $\mathbb{Z} \neq A$. Atunci există $a + b\sqrt{d} \in A \setminus \mathbb{Z}$, deci $b \neq 0$. Cum $a \in \mathbb{Z} \subset A$, avem $(a + b\sqrt{d}) - a \in A$, adică $b\sqrt{d} \in A$. Dar atunci $-b\sqrt{d} \in A$ și deci $|b|\sqrt{d} \in A$, unde $|b|$ este număr natural nenul. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ cel mai mic număr natural nenul pentru care $k\sqrt{d} \in A$. Arătăm că avem egalitatea $A = \mathbb{Z}[k\sqrt{d}] \overset{\text{def}}{=} \{a + bk\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Deoarece $k\sqrt{d} \in A$ rezultă $bk\sqrt{d} \in A$ pentru orice $b \in \mathbb{Z}$ și cum pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, avem $a \in A$, obținem că $a + bk\sqrt{d} \in A$, $(\forall)\, a, b \in \mathbb{Z}$. Cu aceasta am demonstrat incluziunea $A \supset \{a + bk\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Pentru cealaltă incluziune fie $x \in A$ arbitrar. Deoarece $A \subset \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, există $a, b \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea $x = a + b\sqrt{d}$. Conform teoremei împărțirii cu rest există $q, r \in \mathbb{Z}$ așa încît $b = kq + r$ și $0 \leqslant r < k$. Atunci $x = a + b\sqrt{d} = a + kq\sqrt{d} + r\sqrt{d}$ și cum $a \in \mathbb{Z} \subset A$, $kq\sqrt{d} \in A$, vom avea $x = a - kq\sqrt{d} \in A$, adică $r\sqrt{d} \in A$. Datorită minimalității lui $k \in \mathbb{N}^*$, rezultă $r = 0$ și astfel $b = kq$, deci $x = a + kq\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[k\sqrt{d}]$. Cu aceasta am demonstrat și incluziunea $A \subset \mathbb{Z}[k\sqrt{d}]$, deci egalitatea $A = \mathbb{Z}[k\sqrt{d}]$. Prin urmare inelele cerute sînt cele de tipul $\mathbb{Z}[k\sqrt{d}]$, cu $k \in \mathbb{N}$ (pentru $k = 0$ se obține $A = \mathbb{Z}$, iar pentru $k = 1$ se obține $A = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$).

Să observăm că în soluția dată am folosit numai structura de grup aditiv din inelele $\mathbb{Z}$, A, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ și $\mathbb{Z}[k\sqrt{d}]$. În acest fel problema se putea formula la acest punct și sub forma: *„Să se determine grupurile abeliene A cu proprietatea $\mathbb{Z} \subset A \subset \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$"*, soluția fiind identică.

Scanned with OKEN Scanner

b) Vom arăta că singurele inele B cu proprietatea $\mathbb{Q} \subset B \subset \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ sînt $B = \mathbb{Q}$ și $B = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că dacă $B \neq \mathbb{Q}$ atunci $B = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Într-adevăr, dacă $B \neq \mathbb{Q}$, există $x \in B \setminus \mathbb{Q}$; fie $x = a + b\sqrt{d}$, cu $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$. Deoarece $a \in \mathbb{Q} \subset B$, rezultă $x - a \in B$, adică $b\sqrt{d} \in B$. Dar $b^{-1} \in \mathbb{Q} \subset B$ și atunci $b^{-1}(b\sqrt{d}) \in B$, adică $\sqrt{d} \in B$. Pentru $u, v \in \mathbb{Q}$ oarecare, avem atunci $u + v\sqrt{d} \in B$, deci $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset B$ și cum avem și cealaltă incluziune, deducem egalitatea $B = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Au dat soluții bune elevii *Florin Nicolae*, cl. a XII-a, Lic. matem. fizică nr. 4 București; *Radu Constantinescu*, cl. a XII-a Lic. „N. Bălcescu" București; *Daniel Lesnic*, cl. a XII-a Lic. „M. Viteazul" București ș.a.

3. a) Fie $\varepsilon > 0$ dat și $x, y \in I$ fixate. Să notăm $n = \left[\frac{|x-y|}{\delta(\varepsilon)}\right]$. Dacă $n = 0$, atunci $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ și din definiția lui $\delta(\varepsilon)$, ținînd seama că f este uniform continuă, va rezulta $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Atunci, cu atît mai mult $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \cdot |x - y| + \varepsilon$. Să presupunem acum că $n \in \mathbb{N}^*$. Fixînd ideile, să zicem că $x < y$. Considerăm punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [x, y]$, definite prin $x_1 = x + \delta(\varepsilon)$, $x_2 = x + 2\delta(\varepsilon), \ldots, x_n = x + n\,\delta(\varepsilon)$. Avem: $|x - x_1| = \delta(\varepsilon)$, $|x_1 - x_2| = \delta(\varepsilon), \ldots, |x_{n-1} - x_n| = \delta(\varepsilon)$, iar $|x_n - y| < \delta(\varepsilon)$. Din definiția uniform continuității, deducem:

$$|f(x) - f(x_1)| \leqslant \varepsilon, |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon, \ldots, |f(x_{n-1}) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon \text{ și } |f(x_n) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

și deci:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)| +$$

$$+ |f(x_n) - f(y)| \leqslant \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{(n+1) \text{ ori}} = (n+1)\varepsilon = n\varepsilon + \varepsilon \leqslant \frac{|x-y|}{\delta(\varepsilon)} \cdot \varepsilon + \varepsilon,$$

unde am ținut seama de faptul că f este uniform continuă și de faptul că $n \leqslant \frac{|x-y|}{\delta(\varepsilon)} < n + 1$.

b) ($\Rightarrow$). Să presupunem că f nu este lipschitziană și să demonstrăm că $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$. Vom presupune prin absurd că $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ nu există sau există și este nenulă. Atunci $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$ nu există sau există și nu este egală cu ∞. Deoarece $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \neq \infty$, există un șir $\varepsilon_n \searrow 0$ așa încît șirul $\frac{\varepsilon_n}{\delta(\varepsilon_n)}$ nu tinde la ∞. Dacă luăm $\gamma = \liminf \frac{\varepsilon_n}{\delta(\varepsilon_n)}$, vom avea $\gamma < \infty$, adică $\gamma \in \mathbb{R}$. Cum limita inferioară este punct limită pentru un șir, există un subșir $(\varepsilon_{n_k})_{k \geqslant 1}$ așa încît $\frac{\varepsilon_{n_k}}{\delta(\varepsilon_{n_k})} \to \gamma$. Șirul de termen general $\frac{\varepsilon_{n_k}}{\delta(\varepsilon_{n_k})}$ fiind convergent, va fi mărginit. Fie atunci numărul real $C = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_{n_k}}{\delta(\varepsilon_{n_k})}$. Dar, conform cu punctul a) pentru orice $x, y \in I$ avem: $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon_{n_k}}{\delta(\varepsilon_{n_k})} |x - y| + \varepsilon_{n_k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Ținînd seama de definiția lui C avem $\frac{\varepsilon_{n_k}}{\delta(\varepsilon_{n_k})} \leqslant C, (\forall)\, k \in \mathbb{N}^*$, deci putem continua: $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y| + \varepsilon_{n_k}$, $(\forall)\, k \in \mathbb{N}^*$. Făcînd $k \to \infty$, obținem inegalitatea $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$, $(\forall)\, x, y \in I$, ceea ce înseamnă că funcția f este lipschitziană, contradicție cu ipoteza. Prin urmare $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

($\Leftarrow$). Să presupunem acum că $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon}=0$ și să demonstrăm că funcția f nu este lipschitziană. Presupunem prin absurd că f ar fi lipschitziană, ceea ce înseamnă că există $C>0$ așa încît $|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|$, $(\forall)\ x,y\in I$. Fie $\varepsilon>0$ fixat. Atunci, pentru orice $x',x''\in I$ cu $|x'-x''|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{C}$, rezultă $|f(x')-f(x'')|\leqslant C|x'-x''|$. Ținînd seama de definiția lui $\delta(\varepsilon)$ rezultă $\dfrac{\varepsilon}{C}\leqslant\delta(\varepsilon)$, adică $\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon}\geqslant C^{-1}$. Din inegalitatea $\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon}\geqslant C^{-1}>0$, $(\forall)\ \varepsilon>0$, rezultă că $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ sau nu există, sau există și este strict pozitivă, deci nenulă, ambele situații fiind în contradicție cu ipoteza $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon}=0$. Prin urmare f nu este lipschitziană și soluția se încheie.

Cele mai bune soluții au fost ale elevilor: *Florin Nicolae*, clasa a XII-a, Liceul de matematică-fizică nr. 4 din București și *Radu Constantinescu*, clasa a XII-a, Liceul „Nicolae Bălcescu" din București.

Proba de tehnică matematică

Clasele a IX-a și a X-a

1. Avem $A=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right)-n^2$, $B=n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2$, astfel încît, efectuînd diferența obținem:

$$A-B=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{-1}\right)-n^2-n\sum_{k=1}^{n}a_k^2=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_k^{-1})\right)-n\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+a_k^{-1})=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)-n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k, \tag{1}$$

unde am notat $b_k=a_k+a_k^{-1}$, $k=\overline{1,n}$. Să considerăm acum următoarea sumă:

$$S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i-a_ib_j-a_jb_i+a_jb_j)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-b_j\sum_{i=1}^{n}a_i-a_j\sum_{i=1}^{n}b_i+na_jb_j\right)=$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)+n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=$$

$$=2n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)=2(B-A),$$

unde pentru ultima egalitate am ținut seama de expresia lui $A-B$ dată de (1). Prin urmare, am obținut egalitatea:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)=2(B-A), \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Totodată, pentru orice $i, j = \overline{1, n}$ avem:

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) = (a_i - a_j)(a_i + a_i^{-1} - a_j - a_j^{-1}) = (a_i - a_j)^2(1 - (a_i a_j)^{-1}).$$

Se observă atunci că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 1$, avem $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0$, deci $S \geqslant 0$ și ținînd seama de (2) deducem că $B - A \geqslant 0$, adică $\max(A, B) = B$.

Dacă însă $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n \leqslant 1$, avem $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \leqslant 0$, deci $S \leqslant 0$ și atunci din (2) rezultă $B - A \leqslant 0$, adică $\max(A, B) = A$. În concluzie:

$$\max(A, B) = \begin{cases} A, & \text{dacă } 0 < a_1, a_2, \ldots, a_n \leqslant 1 \\ B, & \text{dacă } a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 1. \end{cases}$$

Au dat soluții bune, care se bazează pe identitatea lui *Lagrange*, elevii *Călălin Zara* și *Octavian Ioachimescu*, cl. a X-a, Lic. „Ștefan cel Mare" Suceava; *Ștefan Andrei*, cl. a X-a, Lic. ind. Buhuși și *Florin Bularda*, cl. a X-a Lic. „C. Negruzzi" Iași

2. a) Fie P mijlocul lui (AC), M mijlocul lui (BC) și O centrul cercului tangent dreptei BC și arcelor $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{AC}$. În cercul de centru O_1 mediatoarea segmentului (AC) trece prin O_1, deci altfel spus, O_1 aparține mediatoarei lui (AC). De asemenea O_1 aparține dreptei BC și atunci rezultă construcția lui O_1: se intersectează dreapta BC cu mediatoarea segmentului (AC). Analog, O_2 se construiește-ca fiind intersecția dreptei BC cu mediatoarea segmentului (AB). Avînd construite O_1 și O_2, precum și punctul A prin care trec cele două cercuri, construcția acestora este imediată (fig. 5).

b) Avem, evident, asemănarea $\Delta O_1PC \sim \Delta AMC$, de unde rezultă:

$$\frac{O_1C}{AC} = \frac{PC}{MC} \Leftrightarrow \frac{R}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + h^2}}{a} \Leftrightarrow R = \frac{a^2 + h^2}{2a}, \qquad (1).$$

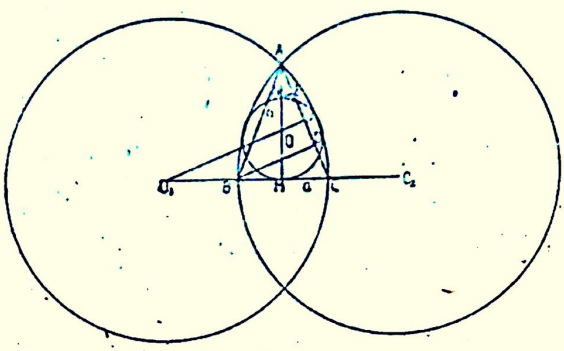


Fig. 5

Evident, $O \in (AM)$ și $OM = r$. Deoarece cercul de centru O_1 și cel de centru O sînt tangente interioare, avem $OO_1 = R - r$, relație care se scrie succesiv:

$$OO_1^2 = (R - r)^2 \Leftrightarrow MO_1^2 + MO^2 = (R - r)^2 \Leftrightarrow (R - a)^2 + r^2 = (R - r)^2 \Leftrightarrow r = \frac{a(2R - a)}{2R}.$$

Ținînd seama și de (1) rezultă în final

$$r = \frac{ah^2}{a^2 + h^2}, \qquad (2).$$

c) Să notăm cu D proiecția lui B pe AC, cu $N \in AM$ punctul diametral opus lui M în cercul de centru O și cu E punctul în care paralela prin N la BC taie pe AC. Deoarece $\Delta BDC \sim \Delta AMB$ rezultă:

$$\frac{BD}{AM} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \frac{BD}{h} = \frac{2a}{\sqrt{a^2+h^2}} \Leftrightarrow BD = \frac{2ah}{\sqrt{a^2+h^2}}, \quad (3).$$

Din teorema lui *Thales* avem $\frac{AM}{MN} = \frac{AC}{CE} \Leftrightarrow \frac{h}{2r} = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{CE}$, de unde dacă ținem seama și de (2) deducem $CE = \frac{2ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$, (4).

Din (3) și (4) deducem că $BD = CE$ și acum rezultă construcția:

1° — din B ducem perpendiculara pe AC și notăm cu D piciorul acesteia (D se poate obține efectiv ca intersecția dintre dreapta AC și unul din semicercurile de diametru $[BC]$);
2° — luăm pe segmentul (AC) punctul E așa încît $CE = BD$;
3° — ducem din E perpendiculara pe AM și notăm cu N piciorul acesteia;
4° — construim mijlocul segmentului (MN) care este centrul O al cercului căutat;
5° — având punctele O și M, se trasează cercul cu centrul O și raza OM.

Au dat soluții bune elevii *Tamas Csilla*, cl. a X-a, Lic. „Dr. P. Groza" Odorheiul Secuiesc; *Bogdan Succavă*, cl. a X-a, Lic. „I. Văcărescu" Tîrgoviște ș.a.

3. Vom trata patru cazuri și anume: i) $a = b = 0$; ii) $a = 0$, $b > 0$; iii) $a > 0$, $b = 0$ și iv) $a > 0$, $b > 0$.

Cazul i). În acest caz relația din enunț este verificată în mod banal de orice punct din plan $M(x, y)$, deci locul geometric este întregul plan.

Cazul ii). Relația din enunț devine $\sin(b|y-b|) = 0$ și este echivalentă cu $b|y-b| = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Ultima egalitate este echivalentă cu familia de ecuații $y = b \pm \frac{k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{N}$. Prin urmare locul geometric este în acest caz o familie de drepte paralele cu axa Ox.

Cazul iii). Relația din enunț devine $\sin(a|x-a|) = 0$ și este echivalentă cu $a|x-a| = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, deci cu familia de drepte $x = a \pm \frac{k\pi}{a}$, $k \in \mathbb{N}$.

Locul geometric este în acest caz o familie de drepte paralele cu Oy.

Cazul iv). Relația $\sin(a|x-a| + b|y-b|) = 0$ este echivalentă cu $a|x-a| + b|y-b| = k\pi$ unde $k \in \mathbb{N}$. Pentru $k = 0$ ecuația $a|x-a| + b|y-b| = 0$ este verificată doar de punctul $M_0(a, b)$. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$ fixat considerînd fiecare din cazurile $x \geqslant a$, $y \geqslant b$, respectiv $x \geqslant a$, $y \leqslant b$, respectiv $x \leqslant a$, $y \geqslant b$ și în fine $x \leqslant a$, $y \leqslant b$, se constată că în fiecare din cele patru cazuri ecuația $a|x-a| + b|y-b| = k\pi$ este reprezentată de mulțimea punctelor unui segment. Reuniunea celor patru segmente este un romb $A_kB_kC_kD_k$ având vîrfurile $A_k\left(a, b + \frac{k\pi}{b}\right)$, $B_k\left(a + \frac{k\pi}{a}, b\right)$, $C_k\left(a, b - \frac{k\pi}{b}\right)$, $D_k\left(a - \frac{k\pi}{a}, b\right)$. Centrul de simetrie al rombului este punctul $M_0(a, b)$. Prin urmare în acest ultim caz considerat, locul geometric este „*rețeaua*" de romburi $A_kB_kC_kD_k$, $k \in \mathbb{N}^*$, la care adăugăm centrul comun al tuturor romburilor din rețea și anume punctul $M_0(a, b)$. Romburile sînt cu laturile respectiv paralele (ele sînt romburi omotetice, centrul de omotetie fiind punctul M_0).

Au dat soluții bune elevii *Cătălin Zara*, cl. a X-a, Lic. „Ștefan cel Mare" Suceava; *Adrian Năstasă*, cl. a X-a, Lic. „C. Negruzzi", Iași.

Clasele a XI-a și a XII-a

1. Soluția I, dată de elevul *Radu Constantinescu*, clasa a XII-a, Liceul „*Nicolae Bălcescu*" din București). Considerăm ecuația diofantică $p^2 = x^3 + y^2$ cu necunoscutele p, x, y. Deoarece p este număr prim rezultă ușor că $(p, x, y) = 1$. Se știe atunci (vezi de exemplu *I. D. Ion* și *N. Radu* „Algebra", E.D.P. 1981, pag. 387) că toate soluțiile ecuației considerate sînt de tipul $p = u^2 + v^2$, $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ unde $u, v \in \mathbb{Z}$. În particular avem $p = u^2 + v^2$ unde u, v le putem presupune naturale nenule.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția a II-a, dată de elevul *Florin Nicolae*, clasa a XII-a, Liceul de matematică-fizică nr. 4 din București. Această soluție se bazează pe aritmetica inelului $Z[i]$ al întregilor lui *Gauss*. Vom presupune prin absurd că

$$(\forall)\ \alpha, \beta \in N \text{ avem } p \neq \alpha^2 + \beta^2, \tag{1}$$

Demonstrăm că în aceste condiții p este un element ireductibil în inelul $Z[i]$. Într-adevăr, să presupunem că $a + bi \in Z[i]$ este un divizor al lui p în acest inel, adică există $c + di \in Z[i]$ astfel încît $p = (a + bi)(c + di)$. Trecînd la normă, obținem $N(p) = N(a + bi) \cdot N(c + di)$, adică $p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. Numărul natural $a^2 + b^2$ divide deci pe p^2 ceea ce arată că $a^2 + b^2 \in \{1, p, p^2\}$. Conform cu (1) nu putem avea $a^2 + b^2 = p$ și atunci neapărat $a^2 + b^2 = 1$ sau $a^2 + b^2 = p^2$. Dacă $a^2 + b^2 = 1$, înseamnă că $N(a + bi) = 1$, deci $a + bi$ este element inversabil în $Z[i]$ și atunci $a + bi$ este asociat în divizibilitate cu 1. Dacă $a^2 + b^2 = p^2$, rezultă $c^2 + d^2 = 1$, deci $N(c + di) = 1$, adică $c + di$ este inversabil și această arată că $a + bi$ este asociat în divizibilitate cu p. Prin urmare orice divizor al lui p este asociat în divizibilitate cu 1 sau cu p, deci p este ireductibil în inelul $Z[i]$. Egalitatea din ipoteză se scrie în inelul $Z[i]$:

$$p \cdot p = (x + iy)(x - iy), \tag{2}$$

Deoarece $Z[i]$ este inel euclidian, fiecare element nenul și neinversabil se descompune în mod unic în produs de factori ireductibili. Atunci egalitatea (2) obligă la asocierile în divizibilitate $p \sim x + iy$ și $p \sim x - iy$, ceea ce înseamnă că există elementele inversabile $u + iv$, $s + it \in \in Z[i]$ așa încît $p = (u + iv)(x + iy)$ și $p = (s + it)(x - iy)$. Dar singurele elemente inversabile din inelul $Z[i]$ sînt $1, -1, i, -i$. Dacă $p = \pm(x + iy)$, rezultă $y = 0$, contradicție. Dacă $p = \pm i(x + iy)$, rezultă $x = 0$, contradicție. Prin urmare presupunerea (1) este falsă, adică există $u, v \in N$ așa încît $p = u^2 + v^2$.

În mod evident, este valabilă și reciproca problemei de față. Folosind aceeași proprietate aritmetică a inelului $Z[i\sqrt{2}]$ de a fi euclidian se poate demonstra că dacă $p > 0$ este un număr prim așa încît $p^2 = x^2 + 2y^2$, cu $x, y \in Z$, $y \neq 0$, atunci $p = u^2 + 2v^2$, cu $u, v \in Z$ (vezi de exemplu problema O : 499 din G.M. nr. 11—12/1986, de același autor). Evident, se pot da și alte exemple de acest tip.

2. Fixînd un număr $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, observăm că minorii de ordinul k se obțin prin selectarea a k linii și k coloane din matricea dată. Deoarece ordinea liniilor este fixată (și la fel, a coloanelor), revine la a selecta submulțimi de k linii din mulțimea de n linii și analog, submulțimi de k coloane din mulțimea de n coloane. Alegerea celor k linii se poate face așadar în C_n^k moduri și analog, alegerea celor k coloane se poate face în C_n^k moduri. Cum liniile se aleg în mod independent față de coloane, rezultă că numărul minorilor de ordinul k este $C_n^k \cdot C_n^k = (C_n^k)^2$. Prin urmare numărul tuturor minorilor este $a_n = \sum_{k=1}^{n} (C_n^k)^2$. Se cunoaște identitatea $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$, adică $1 + a_n = C_{2n}^n$. Atunci $\sqrt[n]{1 + a_n} = \sqrt[n]{C_{2n}^n} = \sqrt[n]{b_n}$, unde am notat $b_n = C_{2n}^n$. Pentru a calcula $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$, folosim teorema *Cauchy-D'Alembert*, adică vom calcula mai întîi $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Avem:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{C_{2n}^n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2},$$

și deci $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 4$. Rezultă $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 4$.

Această problemă a fost rezolvată de majoritatea concurenților.

3. Presupunem prin absurd că $f \circ g$ este periodică. Deoarece $f \circ g$ este continuă și cum orice funcție continuă și periodică este uniform continuă, vom avea că $f \circ g$ este uniform continuă. Prin urmare $(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea : $|x - x'| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x')| \leqslant \varepsilon$, (1). Fie $T > 0$ o perioadă a funcției f. Funcția f fiind continuă pe intervalul compact $[0, T]$, își atinge marginile pe acest interval, deci există $u, v \in [0, T]$ așa încît $f(u) = \min_{x \in [0,T]} f(x) =$

$= m$, $f(v) = \max_{x \in [0,T]} f(x) = M$. Luînd $\varepsilon = \frac{1}{2}(M - m)$, conform cu (1) va exista $\delta_0 > 0$, așa încît:

$$|x - x'| \leqslant \delta_0 \Rightarrow |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x')| \leqslant \frac{1}{2}(M - m), \qquad (2).$$

Afirmăm că putem găsi cel puțin un interval de lungime δ_0, pe care variația funcției g să fie mai mare decît T. Într-adevăr, dacă am accepta contrariul, adică pentru orice $x, x' \in \mathbf{R}$ cu $|x - x'| \leqslant \delta_0$ avem $|g(x) - g(x')| \leqslant T$, atunci pentru $n \in \mathbf{N}^*$ oarecare putem scrie:

$$\left|\frac{g(n\delta_0)}{n\delta_0}\right| = \left|\frac{g(0) + g(\delta_0) - g(0) + g(2\delta_0) - g(\delta_0) + \ldots + g(n\delta_0) - g((n-1)\delta_0)}{n\delta_0}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|g(0)| + |g(\delta_0) - g(0)| + |g(2\delta_0) - g(\delta_0)| + \ldots + |g(n\delta_0) - g((n-1)\delta_0)|}{n\delta_0} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|g(0)|}{n\delta_0} + \frac{nT}{n\delta_0} = \frac{|g(0)|}{n\delta_0} + \frac{T}{\delta_0}.$$

Făcînd $n \to \infty$, ar rezulta $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{g(n\delta_0)}{n\delta_0}\right| \leqslant \frac{T}{\delta_0}$, ceea ce este în contradicție cu ipoteza $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \infty$. Prin urmare există punctele $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $|x_1 - x_2| \leqslant \delta_0$ cu proprietatea $|g(x_1) - g(x_2)| > T$. Aceasta înseamnă că punctele $g(x_1)$ și $g(x_2)$ sînt pe axa reală la distanță mai mare ca perioada T a funcției f, deci putem găsi două puncte a, b între $g(x_1)$ și $g(x_2)$ așa încît $f(a) = m$, $f(b) = M$. Dar funcția g are proprietatea lui *Darboux* și atunci există t_1, t_2 între x_1 și x_2 așa încît $a = g(t_1)$, $b = g(t_2)$. Avem deci

$|t_1 - t_2| \leqslant \delta_0$, dar $|(f \circ g)(t_1) - (f \circ g)(t_2)| = |f(a) - f(b)| = M - m > \frac{1}{2}(M - m)$,

ceea ce contrazice inegalitatea (2).

Contradicția obținută arată că presupunerea făcută este falsă, deci funcția $f \circ g$ nu este periodică.

Singura soluție completă la această problemă a fost dată de elevul *Iulian Grindeanu* clasa a XII-a, liceul de matematică-fizică nr. 2 din Cluj-Napoca.

PROBLEME COMENTATE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

de lector univ. dr. Gh. Siretchi

Vom prezenta în acest articol cîteva probleme care au fost date la diferite concursuri ale elevilor și examene de admitere în învățămîntul superior. Unele probleme, mai dificile, vor fi precedate de afirmații cu caracter general, care au o importanță în sine și care pun în evidență problemele discutate în cadrul lor natural.

1. Problemă. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci f este monotonă (respectiv strict monotonă) $\Leftrightarrow (\forall)\, r_1, r_2, r_3 \in \mathbf{Q}$ distincte între ele, rezultă că funcția $f|_{\{r_1, r_2, r_3\}}$ este monotonă (respectiv strict monotonă).*

Soluție. ($\Leftarrow$): Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$ distincte între ele, spre exemplu $a < b < c$. Evident există $a_n, b_n, c_n \in \mathbf{Q}$ astfel încît $a < a_n < b_n < b < c_n < c$ și $a_n \to a$, $b_n \to b$, $c_n \to c$. Prin ipoteză funcțiile $f|_{\{a_n, b_n, c_n\}} (n \geqslant 1)$ sînt monotone; considerînd un subșir putem presupune că, aceste funcții sînt monotone și de același sens, spre exemplu monoton crescătoare, deci avem:

$$f(a_n) \leqslant f(b_n) \leqslant f(c_n), (\forall)\, n \geqslant 1 \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (1) prin trecere la limită, $n \to \infty$, obținem $f(a) \leqslant f(b) \leqslant f(c)$, deci $f|_{\{a,b,c\}}$ este monotonă (crescătoare) și deci (Prop. 4.2.2. [3]) f este monotonă.

Observația 1. Putem înlocui în Problema 1 mulțimea $\mathbb{R}$ printr-un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ iar $\mathbb{Q}$ printr-o mulțime densă inclusă în I.

Observația 2. Problema 1 a fost propusă de autor la testul final în tabăra elevilor organizată la Băile Herculane în 1986.

2. Problemă. *Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție definită prin $f(x) = 2x + \{x\}$, unde $\{x\}$ înseamnă distanța de la x la cel mai apropiat întreg. Atunci f este continuă, strict monotonă și surjectivă*

Soluția 1. Evident avem $\{x\} = \begin{cases} x - n, & n \leqslant x \leqslant n + \frac{1}{2} \\ n + 1 - x, & n + \frac{1}{2} < x \leqslant n + 1. \end{cases}$

Rezultă imediat că funcția $\{x\}$ este continuă, deci f este continuă, ca sumă de funcții continue. Pe intervalul $\left[n, n + \frac{1}{2}\right]$ funcția f este de forma $2x + (x - n)$, deci de forma $3x - n$ și deci f este continuă și strict crescătoare pe $\left[n, n + \frac{1}{2}\right]$. Pe intervalul $\left(n + \frac{1}{2}, n + 1\right]$ funcția f este de forma $2x + (n + 1 - x)$, deci de forma $x + n - 1$; evident același expresie are f și în punctul $n + \frac{1}{2}$. Așadar f este continuă și strict crescătoare pe $\left[n + \frac{1}{2}, n + 1\right]$. Cum reuniunea tuturor intervalelor de forma $\left[n, n + \frac{1}{2}\right]$ și $\left[n + \frac{1}{2}, n + 1\right]$, cu $n \in \mathbb{Z}$, este egală cu $\mathbb{R}$ și orice două intervale adiacente au un punct comun, rezultă imediat că f este continuă și strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Mai departe avem $2x \leqslant f(x) \leqslant 2x + \frac{1}{2}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Cum $f(\mathbb{R})$ este un interval, deoarece f fiind continuă are proprietatea *Darboux*, concludem că $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, deci f este surjectivă.

Evident f^{-1}, inversa lui f, are aceleași proprietăți.

Soluția 2. Din expresia lui $\{x\}$ rezultă că $\{x\}' = -1$, dacă $x \in \left(n, n + \frac{1}{2}\right)$ și $\{x\}' = -1$, dacă $x \in \left(n + \frac{1}{2}, n + 1\right)$, deci $f'(x) = 3$, dacă $x \in \left(n, n + \frac{1}{2}\right)$ și $f'(x) = 1$, dacă $x \in \left(n + \frac{1}{2}, n + 1\right)$. Atunci f este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $\left(n, n + \frac{1}{2}\right)$ și $\left(n + \frac{1}{2}, n + 1\right)$ $(n \in \mathbb{Z})$. Cum, evident f este continuă în punctele de forma $n, n + \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$, deducem imediat că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ etc.

Observație. La același rezultat se poate ajunge utilizînd un corolar al teoremei lui *Lagrange* generalizată: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe I și derivabilă pe $I \setminus A$, unde $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Dacă $f'(x) > 0$, $(\forall)\, x \in I \setminus A$, atunci f este strict crescătoare.

Scanned with OKEN Scanner

3. Problemă. *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel:* $f(x) = max\{\sin x, \lambda + \cos x\}$, *unde* λ *este parametru real.*

Să se determine valorile lui λ *pentru care* f *este derivabilă pe* $\mathbf{R}$.

Soluție. Vom arăta că f este derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow |\lambda| \geqslant \sqrt{2}$. Fie în acest scop funcțiile:

$$g(x) = \sin x + (\lambda + \cos x),\ x \in \mathbf{R};\ h(x) = \sin x - (\lambda + \cos x),\ x \in \mathbf{R}.$$

Cum g este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $f = \frac{1}{2}(g + |h|)$, avem că f este derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow |h|$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$. Însă

$$h(x) = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \lambda = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} - \lambda =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

deci $|h|$ este derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow$ funcția $\mathbf{R} \ni x \mapsto \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right|$ este derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |\varphi|$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$, unde $\varphi(x) = \sin x - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

(i) Dacă $\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \geqslant 1$, atunci $|\varphi(x)| = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} - \sin x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci $|\varphi|$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$; raționament analog dacă $\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \leqslant -1$.

(ii) Dacă $\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}} < 1$, fie $x_0 \in \mathbf{R}$ cu $\sin x_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$, deci $\varphi(x_0) = 0$.

Atunci (Prop. 6.1.11.' [3]) $|\varphi|$ este derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \cos x_0 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_0 \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$. În acest caz avem $\frac{\lambda}{\sqrt{2}} = \sin x_0 = \pm 1$, absurd. Rămîne că $|\varphi|$ nu este derivabilă în x_0.

Așadar, dacă $\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}} < 1$, funcția $|\varphi|$ nu este derivabilă pe $\mathbf{R}$. Prin urmare f este derivabilă pe $\mathbf{R}$ dacă $\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}} \geqslant 1$ și nu este derivabilă pe $\mathbf{R}$, dacă $\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}} < 1$.

Observație. Problema figurează în [4] (și reluată apoi în [3]) și a fost dată în 1985 la examenul de admitere în facultățile de matematică. Semnalăm aici afirmația generală ([3]):

Propoziție. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval de capete* $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $x_0 \in (a, b)$ *un punct și* $f: I \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci:*

1°. *Dacă* f *este continuă în* x_0 *și* $f(x_0) \neq 0$, *avem:* $|f|$ *derivabilă în* $x_0 \Leftrightarrow f$ *este derivabilă în* x_0;

2°. *Dacă* $f(x_0) = 0$, *avem:* $|f|$ *derivabilă în* $x_0 \Leftrightarrow f$ *derivabilă în* x_0 *și* $f'(x_0) = 0$.

4. Problemă. *Fie* $f: [1, 2] \to \mathbf{R}$ *o funcție cu proprietatea:* $(\forall)\ a, b \in [1, 2]$, $a < b$, *există* $\xi, \eta \in (a, b)$ *astfel încît* $f(\xi) = \xi$, $f(\eta) = 2\eta$. *Atunci* f *nu este integrabilă.*

Soluție. Fie Δ_n diviziunea lui $[1, 2]$ definită de punctele $x_k = 1 + \frac{k}{n}$ $(k = \overline{0, n})$. Evident $\nu(\Delta_n)$, norma lui Δ_n, este egală cu $\frac{1}{n}$, deci $\nu(\Delta_n) \to 0$, $(n \to \infty)$. Prin ipoteză $(\exists)\ \xi_k, \eta_k \in (x_{k-1}, x_k)$ cu $f(\xi_k) = \xi_k$ și $f(\eta_k) = 2\eta_k$, $(k = \overline{1, n})$. Fie mai departe mulțimile de puncte intermediare

Scanned with OKEN Scanner

$\xi_{\Delta_n} = (\xi_k)_{k=\overline{1,n}}$ și $\eta_{\Delta_n} = (\eta_k)_{k=\overline{1,n}}$, unde ξ_k, η_k au fost definite mai sus și să considerăm sumele *Riemann* $\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k)$ $(n \geq 1)$. Evident avem $\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = \sigma_\varphi(\Delta_n, \xi_{\Delta_n})$, $(\forall)\, n \geq 1$, unde $\varphi : [1, 2] \to \mathbf{R}$ și $\varphi(x) = x$. Funcția φ fiind continuă este integrabilă, deci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = \lim_{n\to\infty} \sigma_\varphi(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = \int_1^2 \varphi = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}.$$

Analog, dacă punem $\psi(x) = 2x$, $x \in [1, 2]$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_f(\Delta_n, \eta_{\Delta_n}) = \lim_{n\to\infty} \sigma_\psi(\Delta_n, \eta_{\Delta_n}) = \int_1^2 \psi = 2\int_1^2 \varphi = 3.$$

Așadar șirurile de sume *Riemann* $(\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}))_{n\geq 1}$, $(\sigma_f(\Delta_n, \eta_{\Delta_n}))_{n\geq 1}$ au limite diferite, prin urmare f nu este integrabilă.

Observația 1. Problema poate fi generalizată astfel: Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții integrabile care nu coincid în toate punctele lor de continuitate și fie $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea: $(\forall)$ $\alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha < \beta$, există ξ, $\eta \in (\alpha, \beta)$ cu $h(\xi) = f(\xi)$ și $h(\eta) = g(\eta)$. Atunci h nu este integrabilă. Dacă f și g sînt continue în x_0 și $f(x_0) \neq g(x_0)$, atunci h este discontinuă în x_0.

Observația 2. Funcția f din Problema 4 este discontinuă pe $[1, 2]$. Într-adevăr, fie $x_0 \in [1, 2]$ fixat; presupunem $x_0 > 1$ și fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq (1, x_0)$ un șir strict crescător, care are limita x_0. Prin ipoteză există $\xi_n, \eta_n \in (x_n, x_{n+1})$ astfel încît $f(\xi_n) = \xi_n$ și $f(\eta_n) = 2\eta_n$.

Evident avem $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \eta_n = x_0$, în timp ce $\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = x_0$, $\lim_{n\to\infty} f(\eta_n) = 2x_0 \neq x_0$, prin urmare f este discontinuă în x_0, deci pe $(1, 2]$. Raționament analog dacă $x = 1$.

Funcția f fiind discontinuă în fiecare punct, din teorema lui *Lebesgue* (T.9.1.14. [3]) rezultă că f nu este integrabilă.

Observația 3. Problema 4 figurează în [1] și a fost dată în 1985 la examenul de admitere în facultățile de matematică.

5. Propoziție. *Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea Darboux. Atunci $(\forall)\, l \in \mathbf{R}$, funcția $\tilde{f} : [a, b) \to \mathbf{R}$ definită astfel $\tilde{f}(a) = l$ și $\tilde{f}(x) = f(x)$, $(\forall)$ $x \in (a, b)$, are proprietatea Darboux $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq (a, b)$, $a_n \to a$ și $f(a_n) \to l$.*

Demonstrație. Implicația $(\Rightarrow)$ rezultă din Prop. 5.5.20 ([3]) aplicată funcției $\tilde{f}$.

$(\Leftarrow)$: Presupunem că $(\exists)$ $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq (a, b)$ cu $a_n \to a$ și $f(a_n) \to l$ și fie $J \subseteq [a, b)$ un interval fixat. Atunci (Prop. 4.3.2. [3]) $f(J \setminus \{a\})$ este un interval și avem $f(a_n) \in f(J \setminus \{a\})$, $(\forall)$ $n \geq 1$, de unde rezultă imediat că $\{l\} \cup f(J \setminus \{a\})$, care este egală cu $\tilde{f}(J)$, este un interval. Din Prop. 4.3.2 ([3]) deducem că $\tilde{f}$ are proprietatea lui *Darboux*.

Corolar 1. *Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea Darboux. Atunci $(\exists)$ $g : [a, b) \to \mathbf{R}$, o funcție cu proprietatea Darboux astfel încît $g|_{(a,b)} = f \Leftrightarrow (\exists)$ $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq (a, b)$, cu $a_n \to a$ și $(f(a_n))_{n\geq 1}$ șir mărginit.*

Demonstrație. $(\Leftarrow)$: Considerînd un subșir al lui $(a_n)_{n\geq 1}$ putem presupune că $(f(a_n))_{n\geq 1}$ este convergent; fie l limita sa și $g : [a, b) \to \mathbf{R}$ o prelungire a lui f cu $g(a) = l$. Din Prop. 5 rezultă că f are proprietatea *Darboux*.

6. Propoziție. *Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită cu proprietatea Darboux. Atunci:*

1°. $(\exists)$ $g : [a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea Darboux astfel încît $g|_{(a,b)} = f$;

2°. Funcția g definită în 1° este unic determinată $\Leftrightarrow$ f are limită în a.

Demonstrație. 1°. Fie $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq (a, b)$, $a_n \to a$, fixat. Deoarece f este mărginită, șirul $(f(a_n))_{n\geq 1}$ este mărginit, deci (Prop. 5 Cor. 1) $(\exists)$ $g : [a, b) \to \mathbf{R}$ având proprietatea *Darboux* și $g|_{(a,b)} = f$.

2°. $(\Rightarrow)$: Presupunem că există $g : [a, b) \to \mathbf{R}$ cu proprietatea *Darboux*, unic determinată, care prelungește pe f și fie $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq (a, b)$, $a_n \to a$, un șir fixat. Evident $(f(a_n))_{n\geq 1}$ este un șir mărginit, deci el posedă un subșir convergent $(f(a_{n_k}))_{k\geq 1}$; fie l limita sa. Să considerăm funcția $h : [a, b) \to \mathbf{R}$ definită astfel $h(a) = l$ și $h|_{(a,b)} = f$. Din Prop. 5 rezultă că h are proprietatea *Darboux*.

8 — c. 2722

Scanned with OKEN Scanner

Așadar funcțiile $g, h : [a, b) \to \mathbf{R}$ au proprietatea *Darboux* și $g|_{(a,b)} = h|_{(a,b)} = f$, deci conform ipotezei rezultă $g = h$.

Cu aceasta am arătat că orice subșir convergent al șirului $(f(a_n))_{n\geq 1}$ are limita $g(a)$, de unde deducem imediat că $(f(a_n))_{n\geq 1}$ are limita $g(a)$, prin urmare f are limită în a.

($\Leftarrow$): Fie $g_1, g_2 : [a, b) \to \mathbf{R}$ două funcții cu proprietatea *Darboux*, care prelungesc pe f. Atunci (Prop. 5.5.20. [3]) $(\exists)$ $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(a'_n)_{n\geq 1}$ două șiruri cu elemente din (a, b) convergente la a cu $f(a_n) = g_1(a)$ și $f(a'_n) = g_2(a'_n) \to g_2(a)$.

Deoarece $f(a_+)$ există, rezultă că $f(a_n) \to f(a_+)$ și $f(a'_n) \to f(a_+)$ deci $g_1(a) = f(a_+) = g_2(a)$ și deci $g_1 = g_2$.

Observație. Propoziția 6 și Problema 2 au fost propuse de autor, alături de alte probleme, la concursul interjudețean al elevilor, Deva, 1986. Soluțiile diverse și foarte interesante date de elevi au dovedit o excepțională pregătire a majorității participanților.

7. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $c \in I$ un punct, $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcții de n ori derivabile cu $0 \leq n \leq \infty$ și fie $h : I \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel*

$$h(x) = f(x), \text{ dacă } x \in I \cap (-\infty, c] \text{ și } h(x) = g(x), \text{ dacă } x \in I \cap (c, \infty).$$

Atunci h este de n ori derivabilă $\Leftrightarrow f^{(i)}(c) = g^{(i)}(c)$, $(\forall)$ $0 \leq i < n + 1$.

Demonstrație. Să considerăm cazul cînd n este finit. Evident h este de n ori derivabilă pe $I \setminus \{c\}$ și $(\forall)$ $i \in \overline{0, n}$ avem:

$$h^{(i)}(x) = f^{(i)}(x), \text{ dacă } x \in I \cap (-\infty, c) \text{ și } h^{(i)}(x) = g^{(i)}(x), \text{ dacă } x \in I \cap (c, \infty).$$

Presupunem acum h de n ori derivabilă (pe I). Atunci $(\forall)$ $i \in \overline{0, n-1}$ avem:

$$f^{(i)}(c) = \lim_{x \nearrow c} f^{(i)}(x) = \lim_{x \nearrow c} h^{(i)}(x) = \lim_{x \searrow c} h^{(i)}(x) = \lim_{x \searrow c} g^{(i)}(c) = g^{(i)}(c).$$

Mai departe, deoarece $h^{(n-1)}$ este derivabilă în c și evident $f^{(n-1)}(c) = g^{(n-1)}(c) = h^{(n-1)}(c)$, rezultă

$$f^{(n)}(c) = \lim_{x \nearrow c} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(c)}{x - c} = \lim_{x \nearrow c} \frac{h^{(n-1)}(x) - h^{(n-1)}(c)}{x - c} = h^{(n)}(c).$$

Analog avem $g^{(n)}(c) = h^{(n)}(c)$, deci $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$. Reciproc să presupunem că $f^{(i)}(c) = g^{(i)}(c)$, $(\forall)$ $i \in \overline{0, n}$. Atunci $(\forall)$ $i \in \overline{0, n-1}$ avem:

$$\lim_{x \nearrow c} h^{(i)}(x) = \lim_{x \nearrow c} f^{(i)}(x) = f^{(i)}(c) = g^{(i)}(c) = \lim_{x \searrow c} g^{(i)}(x) = \lim_{x \searrow c} h^{(i)}(x)$$

deci $h^{(i)}(c_-) = h^{(i)}(c_+) = f^{(i)}(c)$.

Punînd $i = 0$ obținem $h(c_-) = h(c_+) = h(c)$, deci h continuă în 0. Apoi din $h'(c_-) = h'(c_+)$ și h' continuă în c, rezultă (T.6.3.8. [3]) că h este derivabilă în c și h' este continuă în c. Mai departe, din h' continuă în c și $h''(c_-) = h''(c_+)$, rezultă că h' este derivabilă în c și h'' este continuă în c. Continuînd acest raționament deducem că h este de $n-1$ ori derivabilă în c cu $h^{(n-1)}$ continuă în c. În fine avem

$$\lim_{x \nearrow c} \frac{h^{(n-1)}(x) - h^{(n-1)}(c)}{x - c} = \lim_{x \nearrow c} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(c)}{x - c} = f^{(n)}(c),$$

deci $(h^{(n-1)})'_s(c) = f^{(n)}(c)$. Analog $(h^{(n-1)})'_d(c) = g^{(n)}(c)$, de unde rezultă că h este de n ori derivabilă în c, deci pe I.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $c \in I$ un punct, $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ două polinoame și $h : I \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel*

$$h(x) = P(x), \text{ dacă } x \in I \cap (-\infty, c] \text{ și } h(x) = Q(x), \text{ dacă } x \in I \cap (c, \infty).$$

Atunci h este indefinit derivabilă $\Leftrightarrow P = Q$.

Demonstrație. Funcțiile polinomiale asociate lui P și Q, notate la fel, fiind indefinit derivabile, rezultă (Propoziția 7) că h este indefinit derivabilă $\Leftrightarrow P^{(i)}(c) = Q^{(i)}(c)$, $(\forall)$ $0 \leq i < \infty \Leftrightarrow R^{(i)}(c) = 0$, $(\forall)$ $0 \leq i < \infty$, unde $R = P - Q$. Aplicînd formula lui *Taylor* pentru polinomul R, presupus de grad n, avem

$$R(x) = R(c) + \frac{x - c}{1!} \cdot R'(c) + \frac{(x - c)^2}{2!} R''(c) + \ldots + \frac{(x - c)^n}{n!} \cdot R^{(n)}(c),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde deducem:

$$R = 0 \Leftrightarrow R^{(i)}(c) = 0,\ (\forall)\ i = \overline{0, n} \Leftrightarrow R^{(i)}(c) = 0.\ (\forall)\ 0 \leqslant i < +\infty.$$

Prin urmare h indefinit derivabilă $\Leftrightarrow P - Q = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

Corolar 2. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; $P \in \mathbb{R}[X]$ *un polinom și* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcție definită astfel:*

$$f(x) = P(x), \text{ dacă } x \in [a, b] \text{ și } f(x) = 0, \text{ dacă } x \notin [a, b].$$

Dacă f *este indefinit derivabilă, atunci* $P = 0$.

Demonstrație. Dacă f este indefinit derivabilă și $I = [a, \infty)$, atunci $h := f|_I$ este indefinit derivabilă. Aplicăm mai departe Corolarul 1 pentru funcția h și punctul $c = b$.

Aplicație. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad n și fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție definită astfel

$$f(x) = e^x, \text{ dacă } x \geqslant 0 \text{ și } f(x) = P(x), \text{ dacă } x < 0.$$

Atunci:

1° f este de n ori derivabilă pe $\mathbb{R} \Leftrightarrow P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$;

2° f nu este de $n+1$ ori derivabilă în 0.

Demonstrație: 1°. Într-adevăr f este de n ori derivabilă $\Leftrightarrow P^{k}(0) = (e^x)^{(k)}(0)$, $(\forall)\ k \in \overline{0, n} \Leftrightarrow P^{(k)}(0) = 1$, $(\forall)\ k \in \overline{0, n} \Leftrightarrow P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

2°. Cum $P^{(n+1)}(0) = 0$ și $(e^x)^{(n+1)}(0) = 1$, rezultă că f nu este de $n+1$ ori derivabilă în 0.

8. Propoziție. *Fie* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcție definită astfel:*

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \text{ dacă } |x| < 1 \text{ și } f(x) = 0, \text{ dacă } |x| \geqslant 1.$$

Atunci f *este indefinit derivabilă.*

Demonstrație. Fie $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție definită astfel:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \text{ dacă } x > 0 \text{ și } \varphi(x) = 0, \text{ dacă } x \leqslant 0.$$

Atunci φ este indefinit derivabilă.

Într-adevăr, avem:

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}; \quad \varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

unde P_{2n} este un polinom cu coeficienți reali de grad $2n$. Evident avem

$$f'(0_-) = \lim_{x \nearrow 0} f'(x) = 0 \text{ și}$$

$$f'(0_+) = \lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = \lim_{t \to \infty} t^2 e^{-t} = 0 \text{ (cf. } L'Hospital),$$

deci $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$ și deci (T.6.3.8. [3]) f este derivabilă în 0, $f'(0) = 0$ și f' este continuă în 0.

Fie $n \geqslant 2$ cu f de $n-1$ ori derivabilă în 0 și $f^{(n-1)}$ continuă în 0.

Cum avem

$$\lim_{x \nearrow 0} f^{(n)}(x) = 0 \text{ și}$$

$$\lim_{x \searrow 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \searrow 0} P_{2n}(x)\, e^{-1/x} = \lim_{t \to 0} P_{2n}(t) \cdot e^{-t} = 0 \text{ (cf. } L'Hospital),$$

deducem (T.6.3.8 [2]) că f este de n ori derivabilă în 0 și $f^{(n)}$ este continuă în 0. În virtutea principiului inducției concludem că $(\forall)\ n \geqslant 1$, funcția f este de n ori derivabilă în 0, deci pe $\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să observăm acum că $f(x) = \varphi(1 - x^2)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deoarece avem:

$$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1 \text{ și } 1 - x^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow |x| \leqslant 1.$$

Cum funcțiile φ și $\mathbf{R} \ni x \mapsto 1 - x^2$, sînt indefinit derivabile, rezultă că f este indefinit derivabilă.

Corolar 1. *Fie* $x_0 \in \mathbf{R}$ *și* $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ *fixați și fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel:*

$$f(x) = e^{\frac{1}{(x-x_0)^2-\varepsilon^2}}, \text{ dacă } |x - x_0| < \varepsilon \text{ și } f(x) = 0, \text{ dacă } |x - x_0| \geqslant \varepsilon.$$

Atunci f *este indefinit derivabilă.*

Demonstrație. Este suficient să observăm că $f(x) = \varphi(\varepsilon^2 - (x - x_0)^2)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, unde φ a fost construită mai sus.

Corolar 2. *Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom cu coeficienți reali și* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel*

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \text{ dacă } |x| < 1 \text{ și } f(x) = P(x), \text{ dacă } |x| \geqslant 1.$$

Atunci f *este indefinit derivabilă pe* $\mathbf{R} \Leftrightarrow P = 0$.

Demonstrație. ($\Rightarrow$) Fie $f_1, f_2: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții definite astfel

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases} \quad \text{și} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ P(x), & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Evident avem $f = f_1 + f_2$ și f_1 indefinit derivabilă (Propoziția 8). Dacă f este indefinit derivabilă, atunci f_2 este indefinit derivabilă, deci (Propoziția 7, Corolar1) $P=0$. Aplicăm Propoziția 8.

Observație. Corolarul 2 constituie o problemă reformulată dată la examenul de admitere în institutele tehnice și economice în iulie 1986.

Bibliografie

[1] *N. Boboc, I. Colojoară.* Analiză matematică, manual cl. a XII-a, E.D.P., 1986.
[2] *Gh. Gussi, O. Stănășilă.* Analiză matematică, manual cl. a XI-a, E.D.P., 1986.
[3] *Gh. Siretchi.* Calcul diferențial și integral vol. I—II, E.S.E., 1985.
[4] *Gh. Siretchi.* Analiză matematică vol. II, ed. a 2-a, Centrul de Multiplicare al Universității București, 1982.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E: 8752* (G.M.1/1986, pag. 18)

Să se calculeze suma numerelor de forma $\overline{ab}$, $a < b$, *știind că fiecare din ele adunat cu răsturnatul său dă 110.*

Teodor Itulescu, învățător, Curtea de Argeș

Soluție. Avem $\overline{ab} = 10a + b$ și $\overline{ba} = 10b + a$. Din condiția problemei rezultă $\overline{ab} + \overline{ba} = 110$ adică $(10a + b) + (10b + a) = 110$ sau $11(a + b) = 110$ sau $a + b = 10$, (1). Deoarece $a < b$, cifrele care satisfac egalitatea (1) sînt:

$$a = 1,\ b = 9;\ a = 2,\ b = 8;\ a = 3,\ b = 7;\ a = 4,\ b = 6.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci numerele cerute sînt: 19, 28, 37, 46. Suma lor este $19 + 28 + 37 + 46 = 120$.

Soluție bună au dat elevii: *Florin Cristian Batali*, cl. a V-a, Ş. g. 21 Cluj-Napoca; *Claudia Onciu*, cl. a VI-a, Ş. g. 2 Galaţi; *Adrian Liviu Popescu*, cl. a VI-a, Ş. g. 15 Piteşti; *Doina Iosif*, cl. a VI-a, Lic. ped. Ploieşti; *Alina Tudor*, cl. a VI-a, Ş. g. 6 Caracal.

Clasa a VI-a

Problema E: 8755* (G.M. 1/1986, pag. 19)

Fie $ABCD$ un paralelogram. Pe AB se ia un punct E, între A şi B, iar pe BC se ia alt punct F, între B şi C. Ştiind că $AC \cap BD = \{O\}$, $OE \cap CD = \{G\}$, $OF \cap AD = \{H\}$, $AD \cap FG = \{M\}$ şi $BC \cap HE = \{N\}$, să se arate că:

a) *punctele M, O, N sînt coliniare;* b) $\Delta MCE \equiv \Delta NAG$.

C. Gidea, profesor, Buzău

Soluţie. a) Din congruenţa triunghiurilor OEB şi DOG (caz U.L.U.) rezultă $OE \equiv OG$, (1), iar din congruenţa triunghiurilor OFC şi OHA (caz U.L.U.) rezultă $OF \equiv OH$, (2). Din (1) şi (2) deducem că $HEFG$ este paralelogram, de unde $HE \| GF$, adică $HN \| MF$. Cum şi $HM \| NF$ rezultă că $HNFM$ este paralelogram cu diagonalele HF şi MN. Conform (2) O este mijlocul diagonalei HF deci diagonala MN va trece şi ea prin O, prin urmare punctele M, O şi N sînt coliniare.

b) Din congruenţa triunghiurilor DAG şi BCE (caz L.U.L.) rezultă $AG \equiv EC$, (3) şi $\widehat{DAG} \equiv \widehat{ECN}$, (4). Din paralelogramul $MCNA$ ($MA \| CN$ şi $MA \equiv CN$) rezultă $MC \equiv AN$, (5) şi $\widehat{MCN} \equiv \widehat{MAN}$, (6). Din (4) şi (6) prin scădere rezultă $\widehat{MCE} \equiv \widehat{NAG}$, (7).

Din relaţiile (3), (5) şi (7) rezultă, conform cazului L.U.L. că $\Delta MCE \equiv \Delta NAG$.

Soluţie dată de *Tabarcea Ion*, cl. a VI-a, Şc. gen. 117 Bucureşti; *Stănică Diana*, cl. a VI-a, Şc. gen. 59 Bucureşti.

Problema E: 8758* (G.M. 1/1986, pag. 19)

Se dau numerele x, y, z, t, u, în care primele trei sînt proporţionale cu 2, 3, 4 şi ultimele trei invers proporţionale cu 2, 3, 4.

1) *Formaţi un şir de numere naturale, cele mai mici posibile, proporţionale cu cele din şirul x, y, z, t, u.*

2) *Calculaţi cele cinci numere ştiind că suma lor este egală cu 123.*

Petrică Ciungu, profesor, Tîrgu Jiu, Gorj

Soluţie. Conform enunţului avem:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}, \text{ (1) şi } 2z = 3t = 4u, \qquad (2).$$

Pentru a putea compara şirurile de rapoarte (1) şi (2), înmulţim numărătorii şirului (1) cu 2 şi numitorii şirului (2) cu 4 şi obţinem:

$$\frac{2x}{2} = \frac{2y}{3} = \frac{2z}{4}; \text{ (1') respectiv } \frac{2z}{4} = \frac{3t}{4} = \frac{4u}{4}, \qquad (2').$$

Deoarece şirurile (1') şi (2') au raportul $\frac{2z}{4}$ comun, putem forma şirul

$$\frac{2x}{2} = \frac{2y}{3} = \frac{2z}{4} = \frac{3t}{4} = \frac{4u}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{\frac{y}{3}}{\frac{2}{}} = \frac{z}{2} = \frac{\frac{t}{4}}{\frac{3}{}} = \frac{u}{1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

a) Pentru ca numitorii să fie numere naturale, îi aducem la același numitor, care este 6, și obținem șirul

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} = \frac{t}{8} = \frac{u}{6}.$$

Deci numerele x, y, z, t, u sînt proporționale cu numerele naturale 6, 9, 12, 8, 6.

b) Pentru a calcula cele cinci numere folosim proprietatea șirului de rapoarte egale și anume:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} = \frac{t}{8} = \frac{u}{6} = \frac{x+y+z+t+u}{6+9+12+8+6} = \frac{123}{41} = 3,$$

de unde $x = 18$, $y = 27$, $z = 36$, $t = 24$, $u = 18$.

Clasa a VII-a

Problema E: 8761* (G.M.1/1986, pag. 20)

Suma a patru numere întregi este 7. Dacă îl adunăm pe primul cu al patrulea obținem 3 și dacă îl adunăm pe al treilea cu primul obținem — 11. Al doilea număr este egal cu de două ori al patrulea. Să se afle numerele.

Patrik Popescu-Pampu, elev, București

Soluție. Fie x, y, z, t cele patru numere întregi. Avem sistemul

$$\begin{cases} x+y+z+t=7 & (1) \\ x+t=3 & (2) \\ z+x=-11 & (3) \\ y=2t & (4) \end{cases}$$

Ținînd seama de (3) și (4), în (1) obținem $3t = 18$, de unde $t = 6$.

Rezultă $y = 12$, $x = -3$ și $z = -8$.

Problema E: 8762* (G.M.1/1986, pag. 20)

Într-un triunghi isoscel ABC ($AB \equiv AC$) se notează cu E și M punctele de intersecție ale bisectoarei și respectiv înălțimii din vîrful B, cu latura AC. Să se arate că $2 \cdot MC \cdot CE = \frac{BC^3}{AB+BC}$.

Iulian Stănică, profesor, Marotinu de Sus, Dolj

Soluție. Din teorema bisectoarei obținem $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC}$ și formînd proporție derivată rezultă $\frac{AB+BC}{BC} = \frac{AC}{EC}$ de unde $EC = \frac{AC \cdot BC}{AB+BC}$, (1).

Luăm punctul $M' \in AC$ astfel încît $MM' \equiv MC$. Deoarece avem și $BM \perp M'C$ rezultă că triunghiul BCM' este isoscel cu vîrful în B. Triunghiurile ABC și $BM'C$ sînt ase-

menca fiind isoscele cu unghiurile de la bază congruente ($\widehat{ACB}$ = comun). Obținem $\frac{M'C}{BC} = \frac{BC}{AC}$, de unde $AC = \frac{BC^2}{2MC}$, care înlocuit în (1) ne dă relația din enunț, $2 \cdot MC \cdot EC = \frac{BC^3}{AB + BC}$.

Problema E: 6763* (G. M. 1/1986, pag. 20)

Să se rezolve ecuația

$$\frac{1}{2x+1}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2x+3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2x+5}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)=\frac{3}{x(x+3)}.$$

Damian Marinescu, profesor, Tîrgoviște

Soluție. Pentru ca ecuația să aibă sens avem condițiile $2x+1 \neq 0$, $x \neq 0$, $x+1 \neq 0$, $2x+3 \neq 0$, $x+2 \neq 0$, $2x+5 \neq 0$, $x+3 \neq 0$ de unde

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

Efectuînd parantezele obținem

$$\frac{1}{2x+1}\cdot\frac{2x+1}{x(x+1)}+\frac{1}{2x+3}\cdot\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{2x+5}\cdot\frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)}$$

de unde

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)}.$$

Ținînd seama că $\frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$ pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$ ecuația se scrie:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{3}{x(x+3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{3}{x(x+3)} \Leftrightarrow \frac{3}{x(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)}.$$

Deci ecuația are o infinitate de soluții și anume $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VIII-a

Problema E : 8770* (G.M. 1/1986, pag. 21)

Se dau patru puncte necoplanare A, B, C, D astfel încît : $AB \perp (BCD)$; $\widehat{CBD} = 120°$, $BM \equiv MA$, $NC \equiv ND$, $M \in AB$, $N \in CD$. Să se arate că :

1) $MN \perp BD \Leftrightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{1}{2}$;

2) Dacă $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{1}{2}$, *este adevărată afirmația „$MN \perp BC$"?*

Alexandru Blaga, profesor, Satu Mare

Soluție. 1) Deoarece $AB \perp (BCD)$ rezultă că $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} = 90°$. Fie $P \in BC$ astfel încît $BP \equiv PC$. Dacă $MN \perp BD$, cum $NP \| BD$, rezultă $MN \perp NP$, deci conform teoremei lui *Pitagora* avem $MP^2 = MN^2 + NP^2$, (1). În plus aplicînd teorema medianei în triunghiurile ABC și CMD pentru medianele CM respectiv MN avem :

$$MC^2 = \frac{2(AC^2 + BC^2) - AB^2}{4}, \tag{2}$$

și

$$MN^2 = \frac{2(MC^2 + MD^2) - DC^2}{4}, \tag{3}.$$

Combinînd relațiile (1), (2) și (3) obținem :

$$DC^2 = BC^2 - 3BD^2, \tag{4}.$$

Aplicînd teorema lui *Pitagora* generalizată în triunghiul BCD pentru latura CD obținem :

$$DC^2 = BC^2 + BD^2 + 2 \cdot \frac{BC \cdot BD}{2} \text{ sau } DC^2 = BC^2 + BD^2 + BC \cdot BD, \tag{5}.$$

Din relațiile (4) și (5) rezultă $BC^2 - 3BD^2 = BC^2 + BD^2 + BC \cdot BD$ sau $2BD = BC$ adică $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

Reciproc, dacă $2BD = BC$ rezultă $4MP^2 = AB^2 + 4BD^2$. Dar $MN^2 + PN^2 = \dfrac{AB^2}{4} + BD^2$, (7), deoarece $DC^2 = 7BD^2$, ultima relație fiind obținută din relația (5) ținînd cont de condiția $2BD = BC$.

Din relațiile (6) și (7) rezultă că $MP^2 = MN^2 + NP^2$, adică $MN \perp NP$ deci $MN \perp BD$.

2) Să presupunem că $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{1}{2}$ și $MN \perp BC$. Deoarece $PN \| BD$, rezultă $MN \perp BD$, conform punctului 1). Din $MN \perp BD$ și $MN \perp BC$ rezultă $MN \perp (BCD)$ ceea ce este absurd, deoarece din ipoteză avem $AB \perp (BCD)$ și ar rezulta că $AB \| MN$ ($M \in AB$). Deci afirmația 2) este falsă.

Soluție dată de *Hanganu Alexandru*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 28 Galați ; *Gurău Nicoleta*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 1 Pucioasa ; *Dumitrașcu Felicia*, cl. a VIII-a, Șc. gen. 1 Roșiorii de Vede

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 20623* (G.M. 12/1985, pag. 471)

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție strict monotonă, să se determine funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încît

$$(f \circ g)(x + 1985) \geqslant f(x) \geqslant (g(x) + 1985), \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, profesor, București

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Putem presupune că funcția f este strict crescătoare (pentru cazul cînd este strict descrescătoare se procedează analog). Din relația din enunț rezultă:

$$g(x+1985) \geqslant x \geqslant g(x)+1985,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow g(x+1985) \geqslant x,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

și

$$x \geqslant g(x)+1985,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}, \text{ sau } g(x) \leqslant x-1985,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}, \quad (2).$$

Dacă în (1) înlocuim x cu $x-1985$ deducem:

$$g(x) \geqslant x-1985,\ (\forall) x \in \mathbf{R}, \quad (3).$$

Din (2) și (3) obținem că $g(x)=x-1985$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Soluție dată de *Trufaşu Luminița*, cl. a IX-a, Lic. „G. M. Murgoci" Brăila.

Clasa a X-a

Problema 20597* (G.M.11/1985, pag. 430)

a) *Să se arate că oricare ar fi* $a \in (0,1)$ *și* $b \in (0,1)$, *atunci* $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geqslant 1$;

b) *Să se arate că există* $a>1$ *și* $b>1$ *astfel încît* $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} > 1$;

c) *Să se arate că există* $a>1$ *și* $b>1$ *astfel încît* $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} < 1$.

Constantin Caragea, profesor, Constanța

Soluție. a) Inegalitatea de la punctul a) este echivalentă cu $\log_{\frac{2ab}{a+b}} a \cdot \log_{\frac{2ab}{a+b}} b \leqslant 1$.

Notăm $E = \log_{\frac{2ab}{a+b}} a \cdot \log_{\frac{2ab}{a+b}} b$ și rezultă $E \leqslant \left(\frac{\log_{\frac{2ab}{a+b}} a + \log_{\frac{2ab}{a+b}} b}{2} \right)^2$. Dar

$$\log_{\frac{2ab}{a+b}} a + \log_{\frac{2ab}{a+b}} b \leqslant 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2ab}{a+b} \right)^2 \leqslant ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Egalitatea are loc doar pentru $a=b$.

b) Fie $1<a<b$; atunci $1<a<\frac{2ab}{a+b}<b$. Deasemenea $\log_{\frac{2ab}{a+b}} b < \log_{\frac{2b}{b+1}} b$ deoarece $\frac{2ab}{a+b} > \frac{2b}{b+1}$. Atunci

$$E = \log_{\frac{2ab}{a+b}} a \cdot \log_{\frac{2ab}{a+b}} b < \log_{\frac{2ab}{a+b}} a \cdot \log_{\frac{2b}{b+1}} b.$$

Fie $\log_{\frac{2b}{b+1}} b = k > 1$. Alegem a astfel ca $\frac{2b}{b+1} > a^k$; (cu un a astfel ales ipoteza $1<a<b$ rămîne adevărată).

Deoarece $a^k < \frac{2b}{b+1} < \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow \log_{\frac{2ab}{a+b}} a^k < 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{2ab}{a+b}} a < \frac{1}{k}$.

Rezultă $E < \frac{1}{k} \cdot k = 1 \Rightarrow \frac{1}{E} > 1$, ceea ce trebuia arătat.

c) Deoarece $\frac{2ab}{a+b} < 2a \Rightarrow \log_{\frac{2ab}{a+b}} a > \log_{2a} a$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci $3 > \log_{2a} a \cdot \log_{\frac{2ab}{a+b}} b$. Fie $\log_{2a} a = k' > \frac{1}{2} \Leftrightarrow a > 2$.

Alegem b astfel ca $b^{k'} > \sqrt{ab} \Leftrightarrow b > a^{\frac{1}{2k'-1}}$.

Deoarece $b^{k'} > \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow \log_{\frac{2ab}{a+b}} b^{k'} > 1 \Rightarrow \log_{\frac{2ab}{a+b}} b > \frac{1}{k'}$.

Deci $E > k' \cdot \frac{1}{k'} = 1$, ceea ce trebuia arătat.

Soluție dată de *Cristina Florie*, cl. a X-a, Lic. „G. M. Murgoci" Brăila;

Clasa a XI-a

Problema 20661* (G.M. 1/1986, pag. 24)

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă cu proprietățile:*

(i) $f(a) + f(-a) > 0$, $a > 0$, *fixat*;

(ii) $|x \cdot f(x) - y \cdot f(y)| \geq |x - y|$, $(\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

Să se arate că:

1) $f(a) > 0$;

2) *dacă funcția* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = (x+1)f(x)$, *este monoton descrescătoare, atunci* f *este descrescătoare.*

Dan Seclăman, profesor, Craiova

Soluție. Notăm $h(x) = xf(x)$, $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, atunci condiția $|x \cdot f(x) - y \cdot f(y)| \geq |x - y|$, $(\forall) x, y \in \mathbf{R}$, devine $|h(x) - h(y)| \geq |x - y|$, $(\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

Această relație ne arată că $h(x) = h(y) \Rightarrow x = y$, deci h este injectivă. Avem

f continuă $\Rightarrow h$ continuă;

$\left.\begin{array}{l} h \text{ continuă} \\ h \text{ injectivă} \end{array}\right\} \Rightarrow h$ monotonă.

În continuare considerăm $a > 0$ fixat și avem:

$$h(a) - h(-a) = af(a) + af(-a) = a[f(a) + f(-a)].$$

Dar $a > 0$ și din enunț $f(a) + f(-a) > 0$; rezultă $a[f(a) + f(-a)] > 0$, deci $h(a) - h(-a) > 0 \Rightarrow h(-a) < h(a)$.

Dacă h ar fi monoton descrescătoare atunci pentru orice $p, q \in \mathbf{R}$, $p < q$, am avea $h(p) > h(q)$. Făcînd $p = -a$ și $q = a$ am avea $h(-a) > h(a)$, contradicție.

Deci h este monoton crescătoare și cum $a > 0$, avem $h(a) > h(0) = 0 \Rightarrow h(a) > 0 \Rightarrow af(a) > 0 \Rightarrow f(a) > 0$ și cu aceasta punctul 1) este demonstrat.

2) h fiind monoton crescătoare, rezultă că $-h$ este descrescătoare. Conform enunțului $g(x) = x \cdot f(x) + f(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Cum $h(x) = x \cdot f(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, rezultă $g - h = f$. Dar g este monoton descrescătoare din enunț, h este monoton descrescătoare din demonstrație și rezultă că $g - h$ este monoton descrescătoare, deci f este monoton descrescătoare.

Soluție dată de *Teodor Cătălin*, cl. a XII-a, Lic. ind. Sinaia.

Clasa a XII-a

Problema 20663* (G.M. 1/1986, pag. 25)

Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Se notează cu* $Z(A)$ *mulțimea matricilor* B *cu proprietatea că* $AB = BA$. *Să se arate că* $Z(A)$ *este spațiu vectorial peste corpul numerelor complexe. Care este dimensiunea acestui spațiu vectorial?*

* * *

Soluție. Fie $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, unde $x, y, z, t \in \mathbf{C}$. Atunci

$$AB = \begin{pmatrix} 2x + z & 2y + t \\ z & t \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 2x & x + y \\ 2z & z + t \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din egalitatea $AB = BA$ rezultă că $B = \begin{pmatrix} y+t & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$, $y, t \in \mathbb{C}$.

Se verifică ușor că $Z(A)$ împreună cu adunarea matricelor și înmulțirea cu scalari a matricelor este spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{C}$. Pentru a determina dimensiunea lui $Z(A)$, considerăm matricile $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și observăm că $B = tP + yQ$, iar dacă $aP + bQ = 0$ rezultă $a = b = 0$. Deci mulțimea $\{P, Q\}$ constituie o bază pentru $Z(A)$, de unde rezultă că $\dim_{\mathbb{C}} Z(A) = 2$.

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

1. La o grădiniță sînt biciclete, triciclete și mașinuțe (cu patru roți) avînd în total 25 roți. Cîte vehicule sînt de fiecare fel?

Ioan Dziţac, profesor, Oradea

2. Efectuați:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + 1984 + 1985) \cdot (1986 : 331 - 6).$$

Ioan Dziţac, profesor, Oradea

3. Un autoturism consumă 7 l de benzină la 100 km. Proprietarul autoturismului parcurge un drum în două zile. În prima zi parcurge jumătate din drum și încă 50 km, adică 425 km, rămînînd ca restul drumului să-l parcurgă în ziua a doua. Să se afle ce cantitate de benzină îi mai trebuie pentru a face drumul dus și întors, cunoscînd că el are în rezervor 60 l de benzină, iar într-o canistră 1 ddal de benzină.

Neculai Huluba, institutor, Bacău

4. Suma a trei numere naturale este 1986. Dacă dublăm primul număr îl obținem pe al doilea, iar dacă din al treilea număr îl scădem pe al doilea, obținem primul număr. Care sînt cele trei numere?

Loredana Diaconescu, elevă, Tomșani, Vîlcea

5. Suma a trei numere naturale diferite de zero este egală cu 18. Știind că diferența dintre primul număr și al doilea este egală cu diferența dintre al doilea număr și al treilea și că al doilea număr este 6, determinați celelalte numere.

Gh. Savu, învățător, Mioveni, Argeș

6. Dan și Mihai aveau fiecare cîte 30 de alune. După ce a mîncat o parte din ele, Dan constată că dacă din alunele ce i-au mai rămas face grămezi de cîte 4 alune îi mai rămîn 3, dacă face grămezi de cîte 3 alune îi mai rămîn 2 și dacă face grămezi de cîte 2 îi mai rămîne o alună. Mihai observă că, deși a mîncat mai puține alune decît Dan, poate și el aplica același procedeu. Cîte alune mai are fiecare?

Alexandru Dumitru, inginer, Ploiești

7. Să se determine un număr cuprins între 100 și 200, știind că sînt îndeplinite simultan condițiile:

a) suma cifrelor sale este 6; *b*) numărul dat nu este par.

Cîte soluții are problema?

Andreea Stoica, elevă, București

Scanned with OKEN Scanner

8. Dacă înaintea unui număr de o cifră scriem cifra 4, numărul obținut este cu 9 mai mic decît numărul pe care îl vom obține dacă scriem cifra 4 la sfîrșitul lui. Care este acel număr?

Andreea Stoica, elevă, București

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9035. Media aritmetică a trei numere naturale este 32. Primul număr este mai mare de două ori decît al doilea, iar media aritmetică între al doilea și al treilea număr este 35. Să se afle numerele.

Lăcrămioara și *Carmen Jiplea*, eleve, Drobeta Turnu-Severin

E : 9036*. Să se determine cifrele a, b, c din sistemul zecimal astfel încît să aibă loc egalitatea :

$$a \cdot \overline{bc} = \overline{cba}.$$

Dragomir Costea, profesor, Gherla, Cluj

E : 9037. Reconstituiți înmulțirea :

$$\begin{array}{r} x\,x\,x\times \\ \hline x\;x \\ \hline 1\;3\;2\;x \\ 1\;x\;5\;x\;\;\; \\ \hline x\;x\;x\;x\;4 \end{array}$$

(unde literele x reprezintă cifre distincte sau nu).

Teodor Bănică, elev, București

E : 9038. a) Să se afle toate numerele de cinci cifre scrise în baza zece, în care produsul dintre numărul format din primele trei cifre și suma ultimelor două cifre este 1985. Care din aceste numere sînt divizibile cu 12?

b) Aflați toate numerele de cinci cifre scrise în baza zece în care produsul dintre suma primelor două cifre și numărul format din ultimele trei cifre este 1985.

Maria Stoica și *Ion Stoica*, profesori, Bacău

E : 9039*. Stabiliți dacă numerele (scrise în baza zece) 101, 10101, 1010101, 101010101 sînt prime sau compuse.

* * *

E : 9040*. Un călător parcurge un drum în trei zile. În prima zi parcurge $\frac{1}{3}$ din drum. În a doua zi parcurge $\frac{1}{4}$ din drumul rămas. În a treia zi parcurge 18 km. Cît este de lung tot drumul?

* * *

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VI

E : 9041*. Diferența dintre cel mai mic multiplu comun și cel mai mare divizor comun a trei numere naturale este 249, iar produsul lor este cu 1512 mai mic decît cele trei numere înmulțite. Să se afle numerele (ordinea nu contează).

Patrik Popescu-Pampu, elev, București

E : 9042. Să se arate că numărul :

$$N = 7^{2+(-1)^m+41^p}$$

este pătrat perfect ; $m,\ p \in \mathbb{N}^*$.

Aurel Enc, profesor, Rm. Vîlcea

E : 9043. Să se demonstreze inegalitățile :

a) $\sqrt{1\cdot 1985}+\sqrt{2\cdot 1984}+\sqrt{3\cdot 1983}+\ldots+\sqrt{1984\cdot 2}+\sqrt{1985\cdot 1}<$
$<\dfrac{1986\cdot 1985}{2}$.

b) $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{1985}<\dfrac{1985\cdot 1988}{4}$.

Nicolae Păuna, profesor, Tîrgoviște

E : 9044*. Care dintre numerele 1986, 1987 și 1988 se pot scrie ca diferență de două pătrate de numere naturale.

George Bogdan Stana, elev, București

E : 9045*. Să se arate că :

a) $\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{10}\right)^2+\left(2+\dfrac{1}{10}\right)^2}+\sqrt{\dfrac{9}{10}}=\sqrt{10}$;

b) $\sqrt{\dfrac{1}{4}+3}+\sqrt{\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{49}}+\sqrt{\dfrac{1}{9}-\dfrac{2}{21}+\dfrac{5}{49}}+\sqrt{\dfrac{1}{9}-\dfrac{2}{3}+2}=\sqrt{13}$.

C. Ionescu-Țiu

E : 9046. Se dă un număr natural (în baza 10) format din 4 cifre distincte între ele și diferite de zero. Produsul primelor două cifre este egal cu numărul format de ultimele două cifre, care este multiplu de 4. Suma dintre prima și ultima cifră este egală cu a doua cifră sau cu suma dintre a doua și a treia cifră mai puțin o unitate. Care este numărul ?

Vilia Bantă, profesoară, Gălbinași, Călărași

Clasa a VII-a

E : 9047. Arătați că $2^{\sqrt{2}}$ nu este întreg.

Vilia Bantă, profesoară, Gălbinași, Călărași

E : 9048. Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$\sqrt{39-2x-10y}=\sqrt{15-2x+2y}=5.$$

C. Ionescu-Țiu

Scanned with OKEN Scanner

E : 9049. Cercurile C_1 și C_2 de centre O_1, respectiv O_2 se intersectează în punctele A și B ($A \neq B$). Dreapta O_1A intersectează pe C_2 în C iar dreaptp O_2B intersectează pe C_1 în D. Dacă notăm cu E și F punctele în care O_1O_2 intersectează pe AD, respectiv BC, arătați că :

a) $\frac{O_1A}{BD} = \frac{O_2B}{AC}$; b) $AEBF$ este romb.

Patrik Popescu-Pampu, elev, București

E : 9050*. Să se calculeze înălțimea corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic știind că între catetele sale există relația

$$16b^2 + 16c^2 = b^4c^2 - 4b^4.$$

M. Petrescu, profesor, Dobrotești, Dolj

E : 9051*. Să se determine $x \in \mathbf{Z}$ astfel ca $\sqrt{\frac{3x-5}{x+1}} \in \mathbf{Z}$.

D. Săvulescu, profesor, Bacău

E : 9052*. Fie AB și CD doi diametri ai unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$ astfel încît $\sphericalangle AOC < 90°$. Știind că tangentele duse la cerc în punctele A și C se taie în M, cele duse prin B și D se taie în N, iar $AM \cap DC = \{P\}$, $MC \cap NB = \{Q\}$ și $AB \cap DN = \{R\}$, să se arate că :

a) Punctele M, O, N sînt coliniare.

b) Punctele P, Q, R sînt coliniare dacă și numai dacă $\frac{OA}{OP} = \frac{1}{3}$.

C. Gîdea, profesor, Buzău

Clasa a VIII-a

E : 9053. Arătați că numărul 5 divide numărul $9 \cdot 3^{50} + 4^{31}$.

Ioana David și *Dumitru Sava*, profesori, Fetești

E : 9054*. Polinomul $P(x)$ de gradul n ($n \geq 2$) împărțit la polinoamele de gradul întîi $A(x)$ și $B(x)$ dă respectiv resturile r_1 și r_2. Se cere :

a) Să se arate că dacă $r_1 \neq r_2$, atunci restul împărțirii lui $P(x)$ prin $A(x) \cdot B(x)$ nu poate fi o constantă.

b) Dacă $A(x) = x + 1$, $B(x) = 2x - 3$, $r_1 = 2$ și $r_2 = 7$, să se găsească restul împărțirii de la punctul a).

Nistor Budescu, profesor, Dalboșeț, Caraș-Severin

E : 9055*. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu latura AB inclusă într-un plan α și $(ABCD) \perp \alpha$. Fie M un punct mobil în planul α cu următoarea proprietate : dacă unim centrul O al dreptunghiului cu centrul R al cercului circumscris triunghiului DCM atunci $OR \perp (DCM)$.

a) Aflați locul geometric al lui M.

b) Care este poziția lui M pentru ca aria lui DCM să fie maximă ?

Mihaela Banyai, profesoară, București

Scanned with OKEN Scanner

E : 9056. Fie un triunghi dreptunghic ABC cu catetele $AB = c$ și $AC = b$. Notăm proiecția punctului A pe dreapta BC cu D și considerăm în spațiu triunghiurile ADB și ADC situate în plane perpendiculare. Demonstrați că unghiul $\widehat{BAC}$ are $60°$ dacă și numai dacă $b = c$.

I. Safta, profesor, Pitești

E : 9057*. Se dă expresia $E(x, a) = \sqrt{x - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} - \frac{9}{4}}$. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încît $E(x, a)$ să existe pentru orice $x \in [2, +\infty)$.

Radu Burlacu, Buzău

E : 9058. Să se determine valoarea minimă a expresiei :

$$E(x, y) = 5(x^2 + y^2) - 2(-x + 4xy + 8y) + 30, \quad x \in \mathbf{R}, \ y \in \mathbf{R}.$$

Florian Buşe, Petroşani

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G : 39. Să se arate că pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $b > 0$ avem :

$$0 \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \frac{a + b}{2} \leqslant \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{a + b}.$$

Ion Bursuc, student, Iași

O.G : 40. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și $\{I\} = AC \cap BD$; $OI \cap (AB) \neq \emptyset$. Notăm cu (Δ) perpendiculara în I pe OI și fie $\{M\} = (\Delta) \cap AD$; $\{N\} = (\Delta) \cap BC$.
Să se arate că $MA \cdot MD = NB \cdot NC$.

Gh. Szöllösy, profesor, Sighetu Marmației

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

20981*. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încît :
1) $b^2 - 4ac \leqslant 0$;
2) $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$, $(\forall)\, x \in [-1, 1]$.
Să se arate că avem $|cx^2 + bx + a| \leqslant 1$, $(\forall)\, x \in [-1, 1]$.

N. N. Hârfan, profesor, Iași

20982. Fie A, B două puncte mobile pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$, astfel încît $AB = R$. Prin A, B se duc două drepte paralele (la o direcție fixă oarecare), AC și BD, unde $C, D \in \mathcal{C}(O, R)$. Notînd $AC = x$, $BD = y$, să se arate că expresia $x^2 + \varepsilon xy + y^2$ este constantă, unde $\varepsilon = 1$ dacă C, D sînt de o parte și de alta a dreptei AB și $\varepsilon = -1$ dacă C, D sînt de aceeași parte a dreptei AB.

Virgil Nicula, profesor, București

Scanned with OKEN Scanner

20983. Fie familia funcțiilor de gradul doi

$$f_m(x) = (1-m)x^2 + mx - 1, \text{ unde } m \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

a) Există $m \in \mathbb{R} - \{1\}$ astfel ca vîrful unei parabole din familia dată să se afle pe prima bisectoare?

b) Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R} - \{1\}$ familia de parabole trece prin două puncte fixe aflate pe axele de coordonate, simetric față de a doua bisectoare;

c) Dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $(1-m)x^2 + mx - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R} - \{1\}$, să se afle valoarea expresiei:

$$E = x_1^{n+2} + x_2^{n+2} - x_1^n - x_2^n - m(x_1^{n+2} - x_1^{n+1} + x_2^{n+2} - x_2^{n+1}).$$

Amelia Pop, profesoară, Cluj-Napoca

20984*. Să se arate că ecuația:

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2$$

admite o infinitate de soluții în $\mathbb{Q}^3$.

Matematika v škole, 1985

20985*. Să se rezolve ecuația:

$$\{x\} = \frac{x + [x] + (x)}{10}$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x, $[x]$ partea întreagă, iar (x) cel mai apropiat întreg de numărul real x.

Nicolae Bișboacă, profesor, Alba Iulia

20986. Fie patrulaterul convex $ABCD$. Se ia un punct E în exteriorul său și se construiește triunghiul AEB astfel încît:

$\widehat{ABE} \equiv \widehat{ADC}$ și $\widehat{BAE} \equiv \widehat{DAC}$. Fie $\{F\} = BD \cap CE$. Să se demonstreze că patrulaterul $AEBF$ este inscriptibil.

Vasile Ion, profesor, Finta, Dîmbovița

20987. Pe laturile (BC), (CA), (AB) ale triunghiului ABC se iau punctele D, E și respectiv F și se notează $\{M\} = EF \cap BC$, $\{N\} = DF \cap CA$, $\{P\} = DE \cap AB$. Dacă punctele M, N, P sînt coliniare, să se arate că cevienele AD, BE și CF sînt concurente.
(În legătură cu problema 16053 din G.M. nr. 9/1976).

Stelian Ciungu, matematician, Craiova

Clasa a X-a

20988*. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Să se rezolve ecuația

$$\sum a\sqrt{(x-b^2)(x-c^2)} = abc.$$

L. Panaitopol

20989. Fie $r_1, r_2, r_3, R_1, R_2, R_3$ razele cercurilor înscrise, respectiv circumscrise ale triunghiurilor BOC, COA, BOA (O fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC). Să se arate că:

$$\frac{a}{r_1R_1} + \frac{b}{r_2R_2} + \frac{c}{r_3R_3} = \frac{4}{R^2}(p + 3R)$$

(a, b, c, p, R au semnificația cunoscută în triunghiul ABC).

Dan Brânzei, inginer, Pitești

Scanned with OKEN Scanner

20990. Să se rezolve ecuația :

$$\log_{\frac{2}{3}}\left(2x^2-\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{x^4-2x^2+1}.$$

Ioan Crișan, profesor, Arad

20991. Să se demonstreze că cel puțin un unghi al unui triunghi are măsura $\pi-2\alpha$ dacă și numai dacă

$$p-(R+r)\operatorname{tg}\alpha=R\sec\alpha\cdot\sin 3\alpha,$$

unde $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, iar R și r au semnificația cunoscută.

Mircea Lascu, profesor, Zalău

20992. Determinați perechile de numere reale (x,y) pentru care

$$a^{x^2}+a^{y^2}=2a^4,\ (a>1),\ \text{iar}\ x^2+y^2\leqslant 8.$$

Mihaela Banyai, profesoară, București

20993*. Se consideră tetraedrul oarecare $[A_1A_2A_3A_4]$. Planul bisector ce intersectează interiorul tetraedrului și care conține muchia $[A_1A_2]$ intîlnește muchia opusă $[A_3A_4]$ în punctul M_{34}, iar planul bisector care intersectează interiorul tetraedrului și conține muchia $[A_3A_4]$ intîlnește muchia opusă $[A_1A_2]$ în punctul M_{12}. În mod asemănător se obțin perechile de puncte $M_{13}\in[A_1A_3]$ și $M_{24}\in[A_2A_4]$, apoi $M_{14}\in[A_1A_4]$ și $M_{23}\in[A_2A_3]$. Să se demonstreze că dreptele $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$, $M_{14}M_{23}$ sînt concurente și să se precizeze poziția punctului comun, față de tetraedrul dat.

Gh. D. Simionescu

20994*. Să se arate că

$$\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\log_a^q pb}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant n^{\frac{1}{q}}(n+1)\log_b\sqrt{a},$$

unde $n\in\mathbf{N}^*$, $a,b,q\in\mathbf{R}$, $0<q<1$, $a>1$, $b>1$ (sau $0<a<1$, $0<b<1$).

Dana Șiclovan, Timișoara

Clasa a XI-a

20995. O reciprocă a teoremei *Stolz-Cesaro* : fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ și $(b_n)_{n\geqslant 1}$ două șiruri de numere reale cu proprietățile :

1°. $0<b_n<b_{n+1}$, $(\forall)\,n\geqslant 1$; $\inf\limits_{n\geqslant 1}\sup\limits_{k\geqslant n}\dfrac{b_k}{b_{k+1}}<1$;

2°. $(\exists)\ l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ și este finită

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ există și este egală cu l. (Condiția 1° este îndeplinită dacă $(\exists)\ \alpha\in(0,1)$ astfel încît $0<b_n<\alpha b_{n+1}$, $(\forall)\ n\geqslant 1$ sau dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}<1$).

Gh. Sireţchi, lector, București

20996. Fie $f:[0,1]\to[1,2]\cup\{3\}$ o funcție cu proprietatea lui *Darboux*. Dacă $(\exists)\ x_0\in[0,1]$ cu $ff(x_0)=3$, atunci f este constantă.

* * *

20997. Fie a și α din $\mathbb{R}$ fixate. Să se construiască o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietățile: 1°. f este discontinuă pe $\mathbb{R}\setminus\{a\}$; 2°. f este derivabilă în a și $f'(a)=\alpha$. Generalizare.

* * *

20998*. Fie $(a_i)_{i=\overline{1,n}}$ și $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$ două șiruri finite de numere reale pozitive, primul în progresie aritmetică iar al doilea în progresie geometrică. Dacă $a_1=b_1$ și $a_n=b_n$, atunci $a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant b_1+b_2+\ldots+b_n$.

* * *

20999*. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție definită prin $f(x)=|x-a|\sin x$, unde $a\in\mathbb{R}$ este fixat. Atunci:

1°. f este derivabilă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow a\in\mathbb{Z}$;

2°. f nu este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ pentru nici o valoare a lui a.

* * *

21000*. Se consideră funcția $f:[1,2n]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}-\sin^2\dfrac{\pi x}{4n+2}$.

Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} f(1) & f(2) & f(3) & \ldots & f(2n-1) & f(2n) \\ f(2) & f(3) & f(4) & \ldots & f(2n) & f(1) \\ f(3) & f(4) & f(5) & \ldots & f(1) & f(2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(2n) & f(1) & f(2) & \ldots & f(2n-2) & f(2n-1) \end{vmatrix}$$

unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$.

Stelian Ciungu, matematician, Craiova

21001. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Se cere să se calculeze A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Știind că șirurile $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, $(c_n)_{n\geqslant 0}$, de termeni inițiali a_0, b_0, $c_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, îndeplinesc relațiile

$$\begin{cases} a_n=b_{n-1}+2c_{n-1} \\ b_n=a_{n-1}+2b_{n-1} \\ c_n=c_{n-1}+2a_{n-1}, \end{cases}$$

să se determine termenii generali ai șirurilor în funcție de n și primul termen al fiecărui șir, folosind eventual rezultatul de la punctul precedent.

Andrei Gămulea, București

Clasa a XII-a

21002*. Să se calculeze integralele nedefinite:

$$\int\sqrt{|1-x|^3}\,dx,\ x\in\mathbb{R};\quad \int|\sin x|\,dx,\ x\in\mathbb{R}.$$

* * *

21003. Fie $f:[a,b]\to[-1,1]$ o funcție strict monotonă. Atunci avem $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b(f(x))^n dx=0$.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

21004. Fie K mulțimea punctelor din plan delimitată de dreptele de ecuație $x = -1$, $y = 0$ și de G_f — graficul lui f, unde $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, dacă $x \in [-1, 0]$ și $f(x) = 1 - x$, dacă $x \in [0, 1]$. Să se determine trei drepte paralele la axa Oy, care împart K în trei mulțimi de arii egale.

* * *

21005. Fie $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcții continue nenegative. Atunci $f = g \Leftrightarrow (\forall)\ \alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha < \beta$, volumele corpurilor obținute prin rotirea graficelor funcțiilor $f_{|[\alpha,\beta]}$ și $g_{|[\alpha,\beta]}$ în jurul axei Ox, sînt egale.

Gh. Sirețchi, lector, București

21006*. Fie $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ un întreg liber de pătrate. Definim funcția normă $N: \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}$ prin $N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$. Să se demonstreze că:

a) $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$;

b) Elementul $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ dacă și numai dacă $N(z) \in \{-1, 1\}$;

c) Notînd cu $U(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ grupul multiplicativ al elementelor inversabile din inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, avem pentru $d = -1$, $U(\mathbb{Z}[i]) = \{1, -1, i, -i\}$, respectiv pentru $d \leqslant -2$, $U(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) = \{-1, 1\}$.

* * *

21007*. În spațiul $\mathbb{R}^4$ se dau vectorii: $x_1 = (1, 1, 2, 1)$; $x_2 = (1, -1, 0, 1)$; $x_3 = (0, 0, -1, 1)$; $x_4 = (1, 2, 2, 0)$; $x = (1, 1, 1, 1)$.

a) Demonstrați că cei patru vectori x_1, x_2, x_3, x_4 constituie o bază pentru spațiul $\mathbb{R}^4$.

b) Exprimați coordonatele vectorului x în baza formată de x_1, x_2, x_3, x_4.

* * *

21008. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu cel puțin trei elemente și e elementul neutru. Grupul G are proprietatea că $(\forall) x, y \in G - \{e\}$ există $z \in G$ (care depinde de x și de y) așa încît $xy = z^2$ sau există $t \in G$ (care depinde de x și de y) așa încît $xy = t^3$.

a) Să se arate că $(\forall) x \in G$, $(\exists)\ u \in G$ așa încît $x = u^2$ sau, $(\exists)\ v \in G$ așa încît $x = v^3$;

b) Să se dea un exemplu de grup finit cu proprietatea din enunț și de un grup infinit cu această proprietate.

D. M. Bătinețu-Giurgiu, profesor, București

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. ȘI O.B.M.

O:500. Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon convex și M_k mijlocul laturii $[A_kA_{k-1}]$, $k = \overline{1, n}$, $A_{n+1} = A_1$. Să se demonstreze că există un punct $M \in \text{Int}\, A_1A_2 \ldots A_n$ așa încît $\sum_{k=1}^{n} (A_kA_{k+1}^2 + 4MM_k^2) = 8S$ dacă și numai dacă poligonul este pătrat. (Am notat cu S aria poligonului).

D. M. Bătinețu-Giurgiu

O:501. Fiind dată funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$, să se demonstreze că:

a) Ecuația $(f \circ f)(x) = 0$ are 9 rădăcini reale distincte;

b) Ecuația $(f \circ f \circ f)(x) = 0$ are 27 rădăcini reale distincte.

Generalizare.

Tiberiu Spircu

O:502. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile polinomului de gradul n, $f \in \mathbb{Q}[X]$, ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$. Dacă $g \in \mathbb{Q}[X]$, atunci cardinalul mulțimii $M_g = \{y_k = g(x_k) \mid k = \overline{1, n}\}$ este un divizor al lui n. Mai mult, dacă M_g nu are exact n elemente, adică numerele $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)$ nu sînt toate distincte, atunci M_g are p elemente cu p divizor al lui n și oricare ar fi $y \in M_g$ există printre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ exact $\frac{n}{p}$ dintre acestea, să zicem $x_1', x_2', \ldots, x_{\frac{n}{p}}'$, așa încît $g(x_k') = y$, $k = \overline{1, \frac{n}{p}}$. (În legătură cu problema 3 dată la Barajul 3 din anul 1983, București, autor *Toma Albu*).

Ion Savu, București

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C : 657. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f = 2$. Să se arate că nu există funcții $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, astfel încît $g \circ g = f$.

Florin Vulpescu-Jalea, profesor, București

C : 658. Fie O și I respectiv centrul cercului circumscris și centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Notăm cu M, N punctele în care dreapta OI taie cercul circumscris și cu P, Q punctele în care aceeași dreaptă taie cercul înscris, ordonarea acestor puncte pe dreapta OI fiind M, P, Q, N.

Să se demonstreze egalitatea : $|MP - QN| = 2 \cdot OI$.

Ioan Toderiță, profesor, Galați

C : 659. Fie $T \in \mathbb{R}^*$, $A \in (0, +\infty)$ și $B \in \mathbb{R}$. Notăm cu $\mathcal{F}_{A,B,T}$ mulțimea funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea :

$$f(x + T) = Af(x) + B, \ (\forall)\, x \in \mathbb{R},$$

și cu $\mathcal{P}_T$ mulțimea funcțiilor $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodice de perioadă T.

a) Să se constrtaiască o bijecție între $\mathcal{P}_T$ și $\mathcal{F}_{A,B,T}$;

b) Pentru $T \in \mathbb{R}^*$ fixat, notăm cu $\mathcal{F}_T$ reuniunea tuturor mulțimilor $\mathcal{F}_{A,B,T}$ cînd $A \in (0, +\infty)$ și $B \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\mathcal{F}_T$ include mulțimea funcțiilor de gradul I și mulțimea funcțiilor exponențiale.

Marcelina Popa, profesoară, Tulcea

C : 660. Într-un triunghi ascuțitunghic ABC se notează cu O centrul cercului circumscris de rază R și fie R_a, R_b, R_c, r razele cercurilor circumscrise triunghiurilor BOC, COA, AOB, respectiv raza cercului înscris triunghiului ABC. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} = \frac{2}{R}\left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

Florin Rotaru, matematician, Focșani

Clasele a XI-a și a XII-a

C : 661. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Aflați cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $A^n = I$.

b) Arătați că nu există nici o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, diferită de A^{-1} și de $-A^{-1}$, așa încît $B^2 \neq I$, $B^4 = I$ și $(AB)^2 = I$.

c) Ce se poate spune la b) dacă înlocuim pe $\mathbb{R}$ cu $\mathbb{C}$?

Tiberiu Spircu.

C : 662. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ și care îndeplinește condițiile :

(1) $f(x) + 2f'(x) + f''(x) \leqslant 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

Să se demonstreze că $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

Călălin Toader, student, București

C : 663. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcții integrabile cu proprietatea $f(x) \geqslant g(x)$, $(\forall)\, x \in [a, b]$. Să se demonstreze că $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ dacă și numai dacă există $x_0 \in [a, b]$ astfel încît funcția $f - g$ este continuă în x_0 și $f(x_0) > g(x_0)$.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

C:664. Fie $x \in \mathbb{R}$ și $a, b > 0$. Dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$\frac{\sin^{2n+2} x}{a^n} + \frac{\cos^{2n+2} x}{b^n} = \frac{1}{(a+b)^n},$$

să se arate că această relație este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

L. Panaitopol

PROBLEME DE INFORMATICĂ

I:305. Se dau două numere întregi a, b. Găsiți și programați un algoritm pentru determinarea întregilor x, y care verifică relația $xa + yb =$ c.m.m.d.c. (a, b).

Radu Nicolescu, matematician, C.C.U.B.

I:306. Găsiți și programați într-un limbaj de nivel înalt un algoritm portabil care să stabilească intervalul de timp la care se actualizează ceasul sistemului. Presupunem existența unei rutine prin care se poate afla timpul indicat de ceas.

Radu Nicolescu, matematician, C.C.U.B.

I:307. Este binecunoscut (și ușor de arătat) faptul că pentru orice întregi $m, n \geq 0$, există numerele naturale a, b, a', b' cu proprietatea că:

$$am - bn = d = a'n - b'm$$

(aici $d = (m, n)$ este cel mai mare divizor comun al lui m și n).

a) Arătați că pentru orice întregi $k \geq 2$, $x_1, \ldots, x_k \geq 0$, dacă $d = (x_1, \ldots, x_k)$ este cel mai mare divizor comun al lui $x_1, \ldots, x_k$, atunci pentru orice alegere de semne $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ (nu toate semnele egale) există numerele naturale $a_1, \ldots, a_k$ cu proprietatea că:

$$\varepsilon_1 a_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k a_k x_k = d.$$

b) Să se scrie un program FORTRAN care citind un număr natural $k \geq 2$, un vector de numere naturale $X = (x_1, \ldots, x_k)$ și o succesiune de semne + sau − (nu toate egale) date de vectorul SIGN $= (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$, să calculeze și să scrie la imprimantă:

— valoarea $d = (x_1, \ldots, x_k)$ și

— un vector de numere naturale $A = (a_1, \ldots, a_k)$ cu proprietatea că $\varepsilon_1 a_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k a_k x_k = d$.

Șerban Buzeșeanu, matematician, C.C.U.B.

I:308. Fie f o funcție a cărei lege de corespondență este

$$f(x) \overset{\text{def}}{=\!=} (x - y)^2 \quad \text{și} \quad A = \left\{ \frac{i}{10^4} \,\middle|\, i \in \{0, 1, 2, \ldots, 10^4\} \right\}.$$

Să se elaboreze un program FORTRAN pentru a verifica următoarea inegalitate:

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in A} f(x, y) \neq \inf_{x \in A} \sup_{y \in A} f(x, y).$$

Marin Vlada, matematician, București

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

BUCUREȘTI Ș.g. 11 cl. VII Popescu Patrick (200); Ș.g. 15 cl. VI Facsinay Andreea (70), cl. VII Popescu Ioana (300); Ș.g. 30 cl. VII Alexandru Mihaela Magdalena (150); Ș.g. 36 cl. VIII Drapaca Corina (57); Ș.g. 49 cl. V. Maria Cristina (130); Ș.g. 56 Smărăndoiu Liviu (200); Ș.g. 59 cl. V Stănică Diana (250); Ș.g. 70 cl. VI Dumitru Alina (98); Ș.g. 73 cl. IV Raischi Alina (40); Ș.g. 98 cl. VI Ionescu Marius (65); Ș.g. 108 cl. V Mință Gheorghe (51), cl. VI Gorgan Emanuel-Alexandru (100), Ilie Gheorghe

Scanned with OKEN Scanner

(55), cl. VII Nedeloaca Cătălin Marian (100); Ş.g. 118 cl. VI Stana George Bogdan (20); Ş.g. 142 cl. VI Dragotă Victor Cosmin (171); Ş.g. 149 cl. VII Dalerin Daniela (156); Ş.g. 150 cl. VI Vătăşescu Veronica (60); Ş.g. 156 cl. V Ceauşu Aura Florentina (70); Dorobanţu Alina (28), Indrei Octavian Florin (60), Istrate Aurelian Romulus (60), Mihalache Dragoş-Emanuel (59), cl. VI Manolache Şerban (61), Bulgaru Bogdan (40); Ş.g. 157 cl. VII Barus Adrian (130), Iosub Mona-Lisa (160), Orban Cătălin (210). Ş.g. 169 cl. IV Drăgulescu Alexandru (100), cl. VI Dinulescu Adriana (18); Ş.g. 172 cl. V Andrei Cosmin (60); Ş.g. 196 cl. VI Lixandru Cătălin (72); Ş.g. 201 cl. V Ungureanu Ştefan Alexandru (100); Ş.g. 206 cl. V Vasile Ion (60), cl. VII Duţu Romică (35). Mihai Cristian (100); Ş.g. 278 cl. III Cornea Gabi (130); Lic. ind. 36 cl. IX Ionescu Carmina (230); Lic. mat. fiz. 1 cl. IX Feidac Roxana (40), Marin Liviu (130); Lic. ind. „I. L. Caragiale" cl. IX Neculai Mirela (100), Drăghici Florin (100), Drăghici Irina-Andreea (99), Hogaş Mihaela (198), Mângâţă Corina Mihaela (77), Mizu Antinana (102), Bătrîna Nicolae (109), Hincu Bogdan (54); Lic. ind. 35 cl. V Antonescu Mădălina (96); David Nicolae Valentin (48).

CALAFAT (DOLJ) Ş.g. 1 cl. VI Gîdea Dan (100); CARACAL (OLT) Ş.g. 2 cl. VI Ciobanu Cătălin (120), Driculescu Carmen (30); Ş.g. cl. VI Papuc Anda (50), Maciu Cristian (88); CĂŞEIU (CLUJ) Ş.g. cl. VI Daboc Florina (110); CĂLĂRAŞI (CĂLĂRAŞI) Ş.g. cl. VII Niţulescu Gabriel (80); Ş.g. 4 cl. V Cîmpulungeanu Anca (120), cl. VI Ionescu Victoria (140); CEHU SILVANIEI (SĂLAJ) Ş.g. cl. VI Raţiu Ancuţa (90); CÎMPINA (PRAHOVA) Ş.g. 2 cl. VI Dumitrescu Diana (99), Parasciuc Raluca (90), Vlad Sorin (49); Ş.g. 4 cl. VII Ion Alina (130), cl. VIII Toader Anca Maria (160); Lic. „N. Grigorescu" cl. VII Năstase Daniela (145); CÎMPULUNG MOLDOVENESC (SUCEAVA) Ş.g. 3 cl. VI Erlich Iuliana (85), Ivănescu Marius (40), Ungureanu Cristian (119), Venec Constantin (25), CÎMPULUNG MUSCEL (ARGEŞ) Ş.g. 2 cl. V Neagoe Alina (106); Ş.g. 5 cl. VI Dragomir Geanina (48), Ganea Carmen (83), Nichifor Dragoş (59); CLUJ-NAPOCA (Cluj) Ş.g. 2 cl. VI Cucereanu Vlad (96); Ş.g. 6 cl. VI Crăciun Titus (120), Gabor Adriana (150), Pop Gherghina (90); Lic. arte plastice cl. V Raţiu Daniela (72), cl. VII Nemeş Lucian, (60); Lic. Tehnofrig cl.X Hoalgă Ştefan (120); Lic. „E. Racoviţă" cl V Frenţiu Costin (97), Purdea Ioan (161); Lic. „N. Bălcescu" cl. V Matei Luminiţa (169), Someşan Călin (80); COMIŞA I (DÎMBOVIŢA) Ş.g. cl. V Badea Izabela (90). Birlodeanu Radu (90);

CONSTANŢA (CONSTANŢA) Ş.g. 2 cl. VIII Birt Paul (55); Ş.g. 16 cl. V Chiriac Constantin (98), Prasnea Gina (120), Florea Sorin (50), Gîred Iuliana (120), Halaşag Laura (127), Ionescu Gabriela (90), Păun Elena (120), Vulpe Lăcrămioara (120), cl. VI Chiriac Costin (120), Constantin Dorel (98);

CRAIOVA (DOLJ) Ş.g. 18 cl. IV Zanfir Mirela (68), cl. VI Călina Dorel (81); Ş.g. 21 cl. V Mărinică Simona (100), cl. VII Stoicescu Irina (100); Ş.g. 22 cl. VII Andronescu Anelie (30); Ş.g. 31 cl. V Niţă Elisabeta (98), Peicov Raluca (83), cl. VI Sîrbu Marius (100), cl. VII Dobre Mirela (101), Florescu Narcisa (88), Lupşoiu Sorin (127); Ş.g. 32 cl. VI Gheorghe Daniela (69), cl. VII Popa Simona Eliza (100), Logoviceanu Marian (79), cl. VIII Romcea Cristinel (79); Ş.g. 33 cl. V Manea Marius (60), Trincu Lavinia (80); Lic. ped. cl. VI Perpeziceanu Aniella (120); Lic. „N. Bălcescu" cl. VIII Segărceanu Laura (361); Lic. „Fraţii Buzeşti" cl. V Pană Maria (91), Simion Mihaela (100), Lădădat Alina (50); Lic. militar „T. Vladimirescu" cl. IX Cotigă Ştefan (180); fără menţionare de şcoală: cl. VIII Petolescu Cosmina (100); CUGIR (ALBA) Ş.g. cl. V Buţ Daniela (90), Nicoară Luminiţa (68), Rotche Andreea (34), cl. VII Binder Mihaela (120); CURTEA DE ARGEŞ (ARGEŞ) Ş.g. 1 cl. V Zigoneanu Georgeta (77); Ş.g. 2 cl. V Anghel Mădălina (70); Ş.g. 5 cl. VIII Pletea Marian (139); Ş.g. 6 cl. VI Matei George (92);

DANEŢI (DOLJ) Ş.g. cl. V Gugu Alisa Ofelia (116); DĂRĂBANI (BOTOŞANI) Ş.g. 1 cl. V Dumitrel Daniel (47), Mihai Lucian (48), cl. VI Stoian Ciprian (92); DAVIDENI (NEAMŢ) Ş.g. cl. VI Grigore Elena (120); DEJ (CLUJ) Ş.g. 1 cl. V Dragoş Nadia Andreea (60), cl. VII Vancea Lavinia (98), cl. VIII Tomşa Ion-Gelu (100); Ş.g. 3 cl. VI Călincan Anamaria (70), Hatos Alina (77), Oros Cristina (100), Orşan Teodora (91), cl. VI Misareş Mariana Delia (106), cl. VII Rusu Monica (176), Baias Gabriel (95), Cotuţiu Daniela Laura (57), Spermezan Corina (69), Topan Liliana Manuela (80), Văscan Diana (104), cl. VIII Ceascal Alina (85), Mureşan Voichiţa (47), Răducan Ioan Horea (110), Romega Daniela (100); DÎRMĂNEŞTI (ARGEŞ) .g. cl. V Marin Camelia Georgeta (120); DOROHOI Ş.g. 5 cl. V Bădeliţă Cornel (48); DRĂGĂNEŞTI-OLT (OLT) Ş.g. 1 cl. V Dichiţeanu Monica (55), Suhan Mihaela (63), cl. VI Pavel Romulus Manuel (319); DROBETA—TURNU SEVERIN (MEHEDINŢI) Ş.g. 3 cl. VI Băicuşi Mihaela (83) Luca Ani Daniela (100), Muşat Florina-Adriana (75), cl. VII Prajea Mihai (61); Ş.g. 9 cl. V Popescu Daniel Florin (50), cl. VI Baltaru Laurenţiu (63), cl. VII Dinu Costinel (50); DUDEŞTI (BRĂILA) Ş.g. cl. V Ciocan Elena (92), Poteca Luiza Mihaela (97), Seitaru Maria Gabriela (32), cl. VI Neguţ Veronica (68);

HAŢEG (HUNEDOARA) Ş.g. 2 cl. VI Filiop Biabla (110), Păsărel Alina (121), Stanciu Florin (235); HÎRLĂU (IAŞI) Ş.g. cl. VI Palahgia Paul (100), cl. VII Pohoaţa Oana (100); HOREZU (VÎLCEA) Ş.g. cl. V Armaşescu Robert (94), cl. VII Gororeanu Bogdan (130);

Scanned with OKEN Scanner

HUNEDOARA (HUNEDOARA) Ş.g. 4 cl. V Nimireeag Victor Remus (28); Ş.g. 7 cl. V Kiss Emeşe (50), cl. VI Pătraşcu Cătălin (55), Sturzu Bogdan (58), Lic. mat. fiz. cl. VI Chinciu Gabriel (110), Fina Diana (60), Fischer Bianca (70), Stroici Elena (10); **HUŞI** (VASLUI) Ş.g. 2 cl. V Condurache Tamria (90), cl. VI Mihulca Marcela (114), cl. VII Blesneac Cătălin (106), Chiriţoi Mioara (110), Daciu Cristina (96), Filon Gabriela (90), Macarie Gheorghiţa (106), Moldovanu Costel (90), Popa Mihaela (115), Scurtu Mihaela (140), **IAC** (SĂLAJ) Ş.g. 32 cl. VI Mureşan Rodica (64); **IAŞI** Ş.g. 3 cl. V Vilcu Gabriela (26), cl. VI Bostan Sorina (75); fără menţiune de clasă; Daniela Iuliana (3); Ş.g. 7 cl. V Corogianu Mihaela (78), Ciobanu Cristi (110), Hincu Mihai (79), Negru Gheorghe (90), Tudor Teodora (92), cl. VI Anton Lăcrămioara (91), Bugalete Cătălina (119), Chifor Mirela (124), Filon Felicia (109), Găinuşa Gabriela (98), Ghinea Adrian (91), Năstase Carmen (157), Negrescu Mihaela (116), Onciu Cristina (232), Popa Mihaela (160), Zaharia Elena (60); fără menţiune de clasă: Pinzaru Marius (140); Ş.g. 9 cl. VI Mironescu Radu (110); Ş.g. 10 cl. VI Puiu Mihaela (237) cl. VIII Bujor Cristian (93), Creangă Ana-Lăcrămioara (100), Creţu Liliana (99), Horea Ioan (59), Pricop Ioan (98), Prisăcaru Petronela (100); Ş.g. 13 cl. VIII Gherman Liliana (130), Moscalu Alin (136), Sandu Cristina (100), Stan Camelia (138); Ş.g. 17 cl. VIII Simininc Mariana (245); S.g. 22 cl. V Coba Cătălin Eugen (394), Iancu Bogdan (80), Jalea Irina (69), Năstase Daniel (127), Ruse Diana (110), cl. VI Axinte Isabella (100), Nande Alina (86), Mitu Creola (170); Ş.g. 37 cl. VII Lupuşoru Sorin (90); Lic. informatică cl. IX Rucsăndescu Virgil (170); Lic. „E. Racoviţă" cl. VI Cucoş Mihai Sorin (27), Floreş Bogdan (126), Ioan Dragoş (90), Mereuţă Oana Mădălina (60). Păunescu Lidia (210), Popovici Crina (89), cl. VII Caşcaval Radu (200), Costin Adrian (170). Procopiuc Octavian (100), cl. VIII Cernes Relu (164), Ciubotariu Carmen (165); Lic. „C. Negruzzi", cl. V Croitoru Camelia (70), Ionel Eleny-Nicoleta (210), Agrigoroaiei Ioana (150), Bejancu Rodica (100), Eftimescu Laura (70), Spate Mircea (88), cl. VI Aldescu Mădălina (150), Ciurariu Irina (72), Gheorghiu Serban (230), Iacobuţe Daniel (160), Iftime Mihai (40), Perjoiu Daniela (50), cl. VII Azoiţei V. (170), Cilibiu Valentin (110), Filipescu Dragoş (112), Iacob Iulian (20), Voicu Horaţiu (124), cl. VIII Apostolescu Nicolae (102), Dimitriu Lorena (92), Mandache Elena (105), Patraş Diana (95), Strungaru Daniela (109), fără menţiune de clasă: Ungurianu Clement (128), Hornogea Sanda (185); Lic. Naţional cl. V Alexandrescu Cristina (60), Bilhac Cristina (68), Ghistruga Laura (40), Dărvariu Eduard-Petru (65), Nulcă Angela (56), Homutescu Camelia (93), Ilteni Petrişor (80), Ionescu Vlad (100), Jerghiuţă Mircea (120), Lazăr Roxana (94), Mandache Constantin (15), Manole Cătălin (100), Mihailovici Livia (98), Pampaş Dănuţ (90), Slătineanu Cristinel (185), Vicol Alexandru (96), Vlasov Vanda (69), cl. VI Afluri Cristian (114), Albrecht Irvin (15), Arndt Flavian (87), Bartis Theodor (187), Calancea Mirela (100), Căluianu Maria (196), Căpăţînă Radu (85), Căruceru Oreste (170), Chistruba Laura (21), Cleminte Irina (100), Constantinescu Cristian (50), Cozlaseki Florin (64), Corban Petru (100), Dimitriu Ioana (98), Gălăţeanu Adrian (50), Homutescu Camelia (100), Ieverdan Elena (94), Lăpuşneanu Iulian (110), Lăzărescu Sanda (100), Leonte Ion (85), Manolache Luminiţa (80), Mândru Ioana (97), Mihailovici Livia (85), Miron Iolanda (109), Mitruţă Carmen (100), Olteanu Dana (140), Oproiu Iustina (190), Osoianu Mihaela (93), Palagheanu Alice (94), Peka Victor (120), Pintilie Nicoleta (100), Preotu Alin (28), Rusu Alina (94), Ştefan Bogdan (100), Timofte Monica (98), Tigănaş Ooana (80), Urs che Mirela (75), cl. VII Bergman Judith (100), Blejuşcă Luminiţa (110), Catargiu Olimpia (75), Păucă Dan (100), Vornicu Cristian (100), cl. XI Chifu Iulian (540), Minuţ Cristina (300), Roşca Nicoleta (105), fără menţiune de clasă: Voitcu O. (100); Lic. „G. Ibrăileanu" cl. V Iordăchescu Antonio (30), cl. VI Vidraşcu Traian (177); Lic. „M. Eminescu" cl. VII Birzu Mihaela (77), cl. VIII Bejenaru Bogdan (170); fără menţiune de şcoală: Mechihan Sorin (146), Dumitrache Simona (80), Dima Adriana (105), Grăjdeanu Radu (50), Cante Cristian (60); **IZBICENI** (OLT) Ş.g. cl. VIII Fota Nicuşor (190), Muşuroi Marius (93), fără menţiune de clasă Ion Fota (35); **IZVORU CARGEŞ** Ş.g. 1 cl. VII Mitroi Gheorghe (106); **INEU** (ARAD) Ş.g. cl. VII Sasu Bogdan (280); **ÎNSURĂŢEI** (BRĂILA) Ş.g. 2 fără menţiune de clasă Drăghici Cătălina (65).

LESPEZI (VRANCEA) Ş.g. cl. IV Martin Gica (49); **LICURICI** (TELEORMAN) Ş. g. cl. VI Ciubuc Georgica (90), Petre Mihaela (109); **LIEŞTI** (GALAŢI) Ş. g. 1 cl. VII Dragomir Mirela (142); **LITENI** (SUCEAVA) Ş. g. cl. V Cojocaru Florin (87), cl. VII Cojocaru Daniel (163); **LOGREŞTI** (GORJ) Ş. g. cl. V Preoteasa Laura (200); **LUDEŞTI** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. cl. VI Joiţa C. Silviu (63); **LUDUŞ** (MUREŞ) Ş. g. 2 cl. VI Haţegan Alexandrina (94), Moldovan Maria Florina (103), Saxon Marcela (135), Szekely Genoveva (106), cl. VII Borda Cristina (150), Dan Camelia (165), Hagău Rareş (86), Nicoară Aura (85), Răchită Simona (77), Răileanu Daria (120), Văcar Gabriel (79), cl. VIII Puia Olivia Iulia (104), Sandor Radu (110); **LUGOJ** (TIMIŞ) Ş. g. 4 cl. VIII Doboşan Felix (100); **LUNCA** (BOTOŞANI) Ş. g. 1 cl. VI Iacob Mariana (50), Suşchiu Gabriela (50); **LUPENI** (HUNEDOARA) Ş. g. 2 cl. V Chiriac Irina (69), Grunvald Claudiu (150), Hălăucă Daniela (132); Iordache Augustina (68), Kalcsar Zoltan (50).

Scanned with OKEN Scanner

MEDIAȘ (SIBIU) Ș. g. 1 cl. VI Muresan Monica (108). Ș. g. 4 cl. VII Popovici Claudia (170); Ș. g. 7 cl. VII Priboi Mihaela (120); **MEHENI (CONSTANȚA** Ș. g. cl. VI Ganea I. Florica (99); **METEȘ (ALBA)** Ș. g. cl. VI Drăgan Cornelia (86), Gavrilă Felicia (71); **MOINEȘTI (BACĂU)** Ș. g. 1 cl. V Adam Erica (97), Agache Carmen (57), Blaj Luiza (95), Bujor Cristina (72), Caioaș Minerva (97), Cernat Adina (63), Ivanov Horațiu (49), Mărgel Luminița (81), Neagu Simona (60), Prisecaru Laurențiu (80), cl. VI Comănescu Cristian (30), Dascălu Simona (103), Dragomirescu Sorina (103), Horeș Ovidiu (72), Ivan Iulia (80), cl. VII Anetăruș Corina (140), Blaj Luiza (99), Dimitriu Iulian (120), Despinescu Isabela (178), Iacob Fabius (120), Ilaș Gabriela (203), Maga Rivelina (86), Popescu Iulia (79), cl. VIII Cristinoiu Catalin (105), Ioneț Adrian (61), fără mențiune de clasă: Florea Ramona (60); Ș. g. 2 cl. VI Crăciun Mihaela (112), Neacșu Otilia (112), Spătaru Izabela (112); fără mențiune de școală: Bujor Cristian (143); **MORENI (DÎMBOVIȚA)** Ș. g. 1 cl. V Iordache Robert (100), Irimia Victor (80), cl. VI Ion Beatrice (65), Ștefănescu Mihaela (200), cl. VIII Ion Adrian (84), Guțu Florentina (60), fără mențiune de clasă: Văcărețeanu Nicoleta (150); Ș. g. 3 cl. V Davidescu Nicoleta (119), cl. VI Georgescu Valeria (91); Ș. g. 4 cl. V Lupică Marius (50), Mihai Arina (60), cl. VI Irimescu Andreea (105), Niță Alexandra (95), Niță Cristina (75), cl. VII Alexe Maria (430), Barna Anda (190), Bănulescu Sorina (410), Giroveanu Bogdan (110), Grigore Izabela (210), Stoicescu Virgil (410), Tulue Aurora (400), Tuluc Elena (508), cl. VIII Despa Gabriela (105), Bădeanu Răzvan (50), Irimescu Danina (410); **MORTENI (DÎMBOVIȚA)** Ș. g. cl. VIII Albu Georgeta (45); **MOȘOAIA (ARGEȘ)** Ș. g. cl. VII Dobre Daniela (95); **MOTRU (GORJ)** Ș. g. 1 cl. V Băbucă Monica (100), Chinică Ștefan (90); Coman Valentin (51). Crăciunescu Cosmin (100), Dumitrescu Alin (72), Ghițoscu Paula (107), Lepădat Alina (96), Mitroi Ovidiu (90), Năsărâmbă Carmen (38), Ulariu Octavian (46), cl. VI Cîrdățu Cassiana (70), Cornoiu Daniela (30), Cornoiu Marius (55), Firică Loredana (120), Moldovanu Claudia (220), Lungu Emil (45), Nistoran Mihaela (82), Stan Svetlana (70), cl. VII Bușoi Virginia (49), Dobrin Emanuel (100), Dormuth Marinela (50), Grecu Simona (95), Paralescu Justin (110), cl. VIII Arjoca Camelia (80), Nistoran Mihaela (80), Trifu Simona (242), fără mențiune de clasă: Birlea Alexandra (50), Onea Carmen (50), Toma Antoanela (64); Ș. g. 2 cl. VII Nedelcu Lavinia (88), Toma Rodica (110), cl. VIII Nedelcu Nicu (100); fără mențiune de clasă: Paicu Laura (65); fără mențiune de școală: cl. V Cornoiu Marius (65); **MOTRU-SEC (GORJ)** Ș. g. cl. VI Aninișî Maria (55); **MURGENI (VASLUI)** Ș. g. cl. V Ciubotaru Mihai (38), Ghinea Otilia (67), cl. VII Năstase Leontina (60), Nițu Ovidiu (107), Stan Gina (63);

PĂUNEȘTI (VRANCEA) Ș. g. 1 cl. V Sanda Mariana (79), cl. VI Asavei Adina (240), Bostan Liliana (108), Cantea Lenuța (119), Căutiș Viorica (120), Chelaru Monica (120), Chiriac Viorica (115), Cimpeanu Antonina (113), Dinica Mihaela (107), Dumitru Lucica (108), Paizan Claudia (108), Radu Maricica (120), Tilița Lenuța (92), cl. VII Banu Lenuța (227), Dumitru Liliana (455), Stoica Aurica (107), Banciu Mihaela (105); **PETROȘANI** Lic. ind. 1 cl. IX Comănescu Dan (100); **PIATRA NEAMȚ (NEAMȚ)** Ș. g. 3 cl. V Ciurea Oana (120); Ș. g. 4 cl. VII Costache Maria (100); Ș. g. 27 cl. V Bacrău Anca (85), Hilohi Ștefania Brîndușa (100); Lic. ind. 2 cl. X Ciaușu Remus (72); **PITEȘTI (ARGEȘ)** Ș. g. 1 cl. VII Stamate Dan (30), Oprescu Răzvan (77); Ș. g. 3 cl. V Turcanu Călin (67), cl. VI Georgescu Mihaela (40), cl. IV Mosoianu Daniela (95); Ș. g. 4 cl. VI Dumitrașcu Mihaela (15); Ș. g. 5 cl. VI Bogulescu Melania (97), Bucur Cătălin (84), Guță Loredana (88), Lăzăroiu Anca (117), cl. VII Mihail Marian (161); Ș. g. 6 cl. VIII Udrea Călin (60); Ș. g. 12 cl. VI Popa Ion (55); Ș. g. 13 cl. V Bosoi Nicoleta (80), Constantin Loredana (63), cl. VI Birleanu Constanța (29), Bursugiu Ștefania (98), Capanu Petre Mihai (83), Constantin Mihaela (120); Dumitru Narcisa (150), Maricescu Florentina (120), Mogoș Constantin Cristian (84), Oprea Dan Cristian (30), Orhan Georgeta (118), Popescu Ruxandra (45), Postelnicu Claudia (10), Plăcintescu Ionuț (79), Stupu Teodora (77), Voicu Alina (80), cl. VII Goran Manuela (80), Păunescu Aura (130), cl. VIII Grosu Mihaela (150); Ș. g. 14 cl. VI Barbu Camelia (30); Ș. g. 15 cl. V Angheluță Liliana (110), Bărbulescu Aurelia (65), Gheorghe Gabriela (79), cl. VIII Rozescu Daniela (62); Lic. mat. fiz. 1 cl. IX Borziac Maria — Magdalena (120), cl. VI Căpaun Petre Mihai (102), Tîrziu Lidia (110), cl. VIII Ionescu Ligia (70);

PLOIEȘTI (PRAHOVA) Ș. g. 3 cl. V Danielenco Ioana (100), Iosif Dragoș Adrian (19), Munteanu Cristina (60), cl. VI Calnuschi Anca (60), Cringașu Gabriel (42), Ioniță Angela (98), Vlădescu Cătălin Elena (50); Ș. g. 5 cl. VI Tănase Fernando (90); Ș. g. 6 cl. VI Grosescu Radu (10); Ș. g. 8. cl. VII Maxim Valentina (117); Ș. g. 10 cl. VII Ciucă Iuliana (70); Ioniță Iulian (100); Ș. g. 12 cl. VI Făgărași Tiberiu (42), Făgărași Iuliana (90), cl. VII Constantinescu Mihaela (119); Ș. g. 14. cl. V Iancu Cristian-Virgil (70); Ș. g. 17 cl. VIII Anghel Liliana (149); Ș. g. 24 cl. V Cristea Daniela (19), Predoanu Călin (60); Ș. g. 25 cl. V Cristescu Emil (112), Cirnici Bogdan (60), Mihăilescu Gabriel (38); Ș. g. 26 cl. V Jercan Andrei (51); Ș. g. 28 cl. V Aldescu Iuliana (55); Ș. g. 29 cl. V Dinu Octavian (120); Ș. g. 30 cl. VIII Pandele Nicoleta (98) Ș. g. 71 cl. VII Alexandru Doru Traian (100) Lic. „M. Viteazu" cl. IX Iancu Marius (167), cl. X Mateescu Gina (45); Lic. „I. L. Caragiale" cl. IX Popescu Cătălin (85); Lic. ped. cl. V Alexandrescu Răzvan (98), Bumbăcea Lucian (54), Drăgan Cristian (90), Cri-

gorescu Lucian (100), Nicolae Andreea (89), Robert Ştefan (42), Tomescu Alice (78), cl. VIII Gheorghe Cristina (80), Grigorescu Milinela (137), cl. VI Gora Monica (68), Budulescu Georgiana (88), cl. V Arsene Carmen (60), Naramzi Marioara (99), cl. VI Popa Răzvan (90); PLOPENI (PRAHOVA) Ş. g. cl. VI Bodea Beatrice (80); POIANA (DÎMBOVIŢA) Ş. g. 1 cl. V Marin Carmen Rela (105), Marin Gheorghe (47); PODENI (MEHEDINŢI) Ş. g. cl. V Raia Mihai (107); PUCHENII MARI (PRAHOVA) Ş. g. 1 cl. VI Constantinescu Cosmin (89); PUCIOASA (DÎMBOVIŢA) Ş. g. 1 cl. VI Mihai Monica (125);

RĂCARI (DÎMBOVIŢA) Ş. g. cl. V Radu Daniel (90), cl. VI Ivan Daniela-Gianina (100); RĂCOROASA (VRANCEA) Ş. g. cl. VII Roşu Adela (39); RĂDĂUŢI (SUCEAVA) Ş. g 5 cl. V Melnic Monica (62), Miraută Cătălin (80), Moroşan Adriana (57); Lic. „Eudoxiu Hurmuzachi" cl. IX Trufin Valentin (24); RĂZBOIENI (ARGEŞ) Ş. g. 17 cl. VI Deaconescu Daniel (100); RĂZVANI (CĂLĂRAŞI) Ş. g. cl. VI Grigore Florentin (115); REGHIN (MUREŞ) Ş. g. 6 cl. VI Rostogolea Dan (240); REŞIŢA (CARAŞ-SEVERIN) Ş. g. 9 cl. VII Vrăjitoriu Ana (361); Ş. g. 11 cl. V Tarkany Oana (104); Lic. mat. fiz. cl. VII Mătulă Alina (90), cl. X Iucu Dacian (110); RÎMEŞTI (VÎLCEA) Ş. g. cl. V Botorodea Eleonora (61), Rachieru Ionica (47), cl. VI Vameşu Mihaela (142), cl. VII Viezuină Liliana (140); RÎMNICU SĂRAT (BUZĂU) Ş. g. 1 cl. VI Nicolae Laura Maria (200); Ş. g. 5 cl. VI Dinu Olimpia Carmen (118), Dumitrache Gabriela-Doina (50), Iacob Liliana Elena (70), Mercan Liliana (114); Lic. mat. fiz. „Al. Vlahuţă" cl. IX Mihai Sorin Ionuţ (120); RÎMNICU VÎLCEA (VÎLCEA) Ş. g. 1 cl. V Ceană Edith (75), Ceauşescu Maria (50), Ceauşu Iulia (275), Ciobanu Adina (100), Cristina Mihaela (24), Dincă Andreea (20), Dinu Şerban (300), Dogan Livia Roxana (90), Făgeţeanu Simona (215), Lazăr Daniela (268), Lepădatu Elisabeta Laura (207), Mareş Adina (382), Mihalache Daniela (65), Nadolu Mihai (70), Oprea Marius (83), Osiceanu Alina Mihaela (170), Perşa Adriana (20), Protesaru Camelia (209), Smarandache Carmen (80), Şerban Lucian (268), Tarliu Emanuela (130), Trăistaru Valentin (121), Tudose Maria (207), Tutelcă Diana (137), Ungureanu Corina (197), Ureche Margareta (62), Vasile Roxana (50), cl. VI Constantinescu Zoran (120), Dincă Diana (80), Drăghici Liviu (30), cl. VII Capşa Diana (170), Costa Mihai (70), cl. VIII Bălaşa Costin (82), Drăgoescu Ema (99); Ş. g. 2 cl. VI Ciucă Aida (40), cl. VII Vladu Paul (86); Ş. g. 5 cl. VI Viju Florina (110); Lic. ind. 7 cl. V Bratu Ştefănel (70), Constantinescu Manuel (60), Oprea Ovidiu (79), Rarinca Iustina (90), cl. VIII Enache Gabriela (70); Lic. ind. 8 cl. V Antonescu Lavinia (100), Bănuţă Nicoleta (49), Ionescu Mihaela (80), Piloiu Bianca (70), Poteraş Iulia (40), cl. VI Bornea Maria-Magdalena (49); Lic. mat. fiz. „N. Bălcescu" cl. VII Herzal Cristina (80), Iriţoiu Constantin (48), Popescu Ruxandra (80), Zbirnea Victoria (80); Lic. „Vasile Roaită" cl. IX Popescu Adonis (90); RODENI (MEHEDINŢI) Ş. g. cl. V Buzatu Marinela (120);

ROMAN (NEAMŢ) Ş. g. 1 cl. V Dăscăliţa Daniel (72), Murăraşu Sebastian (75), cl. VI Albu Alina (95). Carciovă Călin (80), Gemen Maria (90), Ichim Claudia (80), Rachieru Răzvan (108), cl. VII Chirilă Remus Huţanu Cătălin (101), Ţigănuş Claudia (15); Ş. g. 3 cl. V Toma Emanuela (69), cl. VII Ghindea Lorin (200); Ş. g. 11 cl. V Acsinte Florin (74), Chiţimul Adi (190), Hanghicel Mihaela (71), Muraru Cătălin (30), Nemeş Rodica (78), Tudose Ovidiu (76), cl. VI Arabei Denis (100), Bălăuţă Mihaela (109), Dincă Lăcrămioara (90), Enea Gabriel (90), Hotăranu Răzvan (124), Iacobuţ Dragoş (117), Savin Cristina (97), Stoleru Simona (90), Tansanu Adelaida (239), Ursăchel Carmen (72), cl. VII Anlace Simona (100), Cadar Loredana (92), Dămoc Lidia (110), Farcaş Irina (116), Iftimie Ovidiu (110), Lupeş Irina (110), cl. VIII Enea Petru (110), Oltea Gabriela (70); ROŞIORII DE VEDE (TELEORMAN) Ş. g. 1 Badea George Dan (80); Ş. g. 2 cl. V Dobocan Diana (110); Ş. g. 3 cl. VIII Rizescu Marius (124); RUGI (GORJ) Ş. g. cl. VI Romanescu Claudia (116); RUGINEŞTI (VRANCEA) Ş. g. cl. V Negrişoiu Silviu (56).

SAMARINEŞTI (GORJ) Ş. g. cl. V Valeriu Daniel (80), cl. VI Bran Valeriu (41); SATU-MARE (SATU-MARE) Ş.g. 2 cl. VIII Benea Roxana (120); Ş. g. 5 cl. V Păkai Otto-Marius (107); Ş. g. 10 cl. VIII Krupa Xenia (130); Ş. g. 14 cl. V Botea Mirabela (100), Iova Laura (80), Horvath Daniela (97), Zevedei Angelica (88), Ene Mihaela (70), Lic. filologie-istorie cl.VIII Davida Gabriel (80); Ş. g. 17 cl. VIII Barth Csilla (120), Ş. g. 20 cl. VIII Munteanu Loredana (140); SĂPATA DE SUS (ARGEŞ) Ş. g. cl. VI Graure Daniel (50), Ştefan Gabi (20); SEBEŞ (ALBA) Ş. g. 2 cl. VI Besoiu Adrian (270), cl. VII Besoiu Corina (218); SEBIŞ (ARAD) Ş. g. cl. VI-Cev Camelia (100), Merceă Lucian (97), Moţ Radu (100), cl. VII Herbei Simona (220), Dărău Cristian (100), Dronca Simona (152), Necola Lavinia (108); SEINI (MARAMUREŞ) Ş. g. 1 cl. VI Adoreanu Edita (87); SEGARNA (DOLJ) Ş. g. cl. VII Danciu Anca (40); SIBIU (SIBIU) Ş. g. 2 cl. VIII Tritean Sanda (268); Ş. g. 10 cl. V Kiraly Roxana (75); SIMERIA Iulia (100); SINAIA (PRAHOVA) Lic. ind. cl. XI Todder Cătălin (324); SÎNTIMBRU (HUNEDOARA) Ş. g. cl. VI Dobrotă Cristina (10);

SLATINA (OLT) Ş. g. 1 cl. V Bădescu Eugenia (100), Dolea Elisa (100), Petrescu Marius (84); Ş. g. 4 cl. V Draghin Cristina (30); Ş. g. 5 cl. V Bucă Adrian (45), cl. VI Brănescu

Scanned with OKEN Scanner

Mihaela (100), Calotă Cosmin (89), Catană Costatn (250), Călin Mihaela (102), Diaconescu Veronica (96), Gheorghe Virginia (93), Ilie Monica (89), Manolache Cătălin (290), Mirea Andreea (115), Mitu Alin (98), Nae Anca (117), Tănăsoiu Vali (110), Trandafir Cecilia (234), cl. VII Anghel Nicolae (78), Iordache Daniel (200), Mândieă Cosmin (88), Simioana Simona (87), Tulpac Narcisa (65), Dorobăț Rodica (60), Negreș Gabriela (91), Tănăsescu Camil (50); Ș. g. 7 cl. V Corbea Elena (50), Davidoiu Daniela (68), Dima Florentina (50), Mihai Alina (67), Moșteanu Simona (50), Olteanu Teodor (45), Voicu Cristina (54), cl. VII Dumitrescu Cristian (50), Dumitrescu Mirela (50), Vișan Mariana (40); Ș. g. 8 cl. V Liciu Dragoș (140), cl. VI Catrina Grațiela (50), Motoi Alina (50), Nicolescu Adriana (20), Scarlat Valina (50), cl. VII Pantelie Adriana (185); Ș. g. 9 cl. V Pătrașcu Ionuț (70), Pietriș Petruța (65), Stoenică Claudia-Ionela (60), Tahacu Raluca (57); Ș. g. 10 cl. V Manda Ion (55); **SLOBOZIA** (IALOMIȚA) Ș. g. 7 cl. VI Stoica Victoriția (338); **STÎRCIU** (SĂLAJ) Ș. g. cl. V Chirilă Dorel (50); **STREJNIC** (PRAHOVA) Ș. g. cl. VII Mihai Mihaela (190); **SUCEAVA** (SUCEAVA) Ș. g. 2 cl. VII Florescu Cătălin (120), Pitic Mihai (20), cl. VIII Marcu Ovidiu Marian (312); Ș. g. 3 cl. V Hurjui Veronica Luminița (31), Oprea Alexandru (172), Pislaru Roxana Elena (33), Puha Bogdan (40), cl. VI Ciocan Cosmina (70), Rei Mariana (27), cl. VII Bejan Anca (90); Ș. g. 4 cl. III Lazăr Irina (127), cl. V Brumă Mariana (71), Criman Ovidiu (71), Jalbă Daniel (81), Lungu Iuliana (30), Manolache Emil (68), Poenaru Sergiu (80), Postacă Cătălin (72), Radu Luminița (66), cl. VI Bejenaru Tănțica (109), Vârvăreanu Carmen (10), Constantinovici Adina (80), Lic. ped. „Emil Bodnăraș" cl. VII Muha Doina (105);

TĂTĂRANU (VRANCEA) Ș. g. 2 Gheorghiță Marieta (107); **TECUCI** (GALAȚI) Ș. g. 2 cl. V Ignat Carmen (38), Patrașcu Gabriela (70), Spinu Anda (68), cl. VI Butan Marlena (90), Cioranu Silvia (86), Girleanu Aurica (92), Grigoraș Gina (100), cl. VII Grama Daniela (80), Neagu Raluca (100), Pătrășanu Nicolae (75), Popescu Florentina (96), Scînteianu Carmen (110), cl. VIII Bolezatu Adrian (91); Ș. g. 4 cl. VI Toma Rodica Sorina (95); Ș. g. 5 cl. VI Cornea Marius (105), Dobre Radu (52), Gheorghiu Geanina (100), Furnică Laura (110), Pîrvulescu Dana (58), Trifoiu Cristina (137), Ureche Violeta (187); Ș. g. 8 cl. VI Turcu Victoria Antonela (70), Călin Marian (90); Ș. g. 10 cl. V Gorovei Dorel (52), Dumitrache Veronica (69), Capanu (55), Bușneaga Lorena (69), Clipici Florin (50), cl. VII Dumitru Corneliu (75); Lic. ind. 2 Chihaia Liliana (80); Lic. agroind. Nacu Margareta (90); fără mențiune de școală: Borș Tincuța (93), Costin Aneta (70), Dumitrescu Sorin (90), Gheorghiceanu F. (71) Grecu Ion (110), Huc Robert (90), Radu Codin (110); **TIMIȘOARA** (TIMIȘ) Ș. g. 15 cl. V Iscru Monica (69); Ș. g. 18 cl. VI Cristescu Cristian (36); Ș. g. 19 cl. VII Birsan Claudiu (80); Ș. g. 24 cl. V Avram Ovidiu (57), cl. VII Jurjescu Raluca (141), Popa Liviu (97), cl. VIII Opreanu Cristina (99), Stranje Simona (88); Ș. g. 25 cl. V Barna Diana (66), Marinescu Valentin (131); Lic. „G. D. Loga" cl. VI Ionașcu Răzvan (88); Lic. „N. Lenov" cl. IX Constantin Adrian (50); fără mențiune de școală: Panaite Alina Greta (50); **TÎRGOVIȘTE** (DÎMBOVIȚA) Ș. g. 1 cl. VII Matei Raluca (97); Ș. g. 2 cl. V Popescu Cătălin (115), Popescu Nicoleta (30), cl. VI Dobrescu Marius (60), cl. VII Nistor Camelia (120); Ș. g. 5 cl. V Balica Răzvan-Adrian (58), Heroiu Andreea (60), Mariniuc Alina (112), Militaru Vasile Gabriel (48), Rotar Adrian (42), cl. VI Stancu Rodica (106), Stănescu Demisa (129), Ștefan Mihaela (60), cl. VII Dobrescu Oana (87); Ș. g. 6 cl. V Pătrașcu Viorica (60), cl. VI Martin Eugen (104), Matache Alina (155), Matei Daniela (117), Mihăescu Eugenia Roxana (121), Mușetescu Amalia (102), Pușcoi Bogdan (110), Dan Sebastian (90), Ungureanu Mihaela (167), Negut Costin (44), cl. VII Rădulescu Anca (97), Ungureanu Alin (110), Duvalmă Simona (148); Ș. g. 11 cl. VI Ivan Adriana (221), Niculescu Roxana (101), Mudura (89); Lic. „Enăchiță Văcărescu" cl. IX Ghiculescu Mihaela (120), Niculescu Radu (120), cl. X Popescu Florin (214); fără mențiune de școală: Ilie Andreea (99), Ioniță Nicoleta (130), Oprea Mihaela (125), Orășelu Elidor (115);

TÎRGU JIU (GORJ) Ș. g. 3 cl. VIII Lehner Carina (38); Ș. g. 4 cl. V Anghel Nicoleta Elena (65); Ș. g. 12 cl. VI Popescu Cornelia Adriana (91), cl. VII Arancuțeanu Mihaela (137); **TÎRGU MUREȘ** (MUREȘ) Ș. g. 15 cl. V Boitor Karoly (42), Istrati Camelia (141), Loghina Carita (46), Pîrici Alin Ion (52), Totoian Anca (100) Lic. „Bolyai Farkaș" cl. VII Petrean Lucian (137); **TÎRGU NEAMȚ** (NEAMȚ) Ș. g. 2 cl. VII Atodiresei Dorina (100); Ș. g. 3 cl. V Popa Iulia (123); Ș. g. 5 cl. VI Dănilă Ion (100), Lica Irina (40), Tărăboanță Paula (60); **TÎRNĂVENI** (MUREȘ) Ș. g. 4 cl. V Cîmpean Valentina (60); **TULCEA** (TULCEA) Ș. g. 4 cl. V Negreanu Florina (50), Zăvoiu Ramona-Elena (94); Ș. g. 10 cl. VI Ivan Adrian (234); Ș. g. 11 cl. V Bașchir Laurențiu (100), Bourceanu Oana Daniela (100), Dimolte Valentin (58), Mititelu Sorin (80), Moisei Laurența (100), Saraev Sorin (100) Scorțaru Adrian (100), Scurtu Paul George (100), Stamatin Florin (100), Stănescu Liliana (80), Tudor Venetia (100), cl. VI Scorțaru Adrian (80); Lic. „S. Haret" cl. VII Albotă Mihaela (200), Ichim Daniela (70), Sebastian Titel (85); Lic. ind. 4 cl. VII Stroe Cristina (124); fără mențiune de școală: Largu Mihaela (60); **TULCEȘTI** (GALAȚI) Ș. g. 1 Decianu Elvira (99), cl. V Pascal Lenuța (90), cl. VI Guțu Gela (100); **TURDA** (CLUJ) Ș. g. 6 cl. VI Popa Cristina (86), cl. VII Mareș Ioana (100), Sandru Lucia (110), cl. VIII Pintea Călin (50); Ș. g. 8 cl. VI Nasca Octav (50); fără mențiune de școală:

Scanned with OKEN Scanner

Sandru Lucia (140); **TURNU MĂGURELE (TELEORMAN)** Ş. g. 1 cl. VI Cîrnaru Nuţica (150); Ş. g. 2 cl. VI Ciuraru Cristian (120), Dulgheru Ionela-Monica (130), Eftimie Marius (95), Filip Iulica (97); Lic. ind. 2 cl. X Florescu Mihai (120);

VADURI (NEAMŢ) Ş. g. cl. V Bîrgăoanu Florentina (50), Curcan Violeta (40), Ghiureş Domnica (90), Guşetu Doiniţa (50), Iftimie Valentina (52), Rica Alina (50), Rusu Lenuţa (49), cl. VII Bobric Gianina (32), Rotaru Mihai (83), Timofte Viorel (62), cl. VIII Cazacu Dumitru (86); **VALEA CĂLUGĂREASCĂ (PRAHOVA)** Ş. g. cl. V Datcu Gabriela (50), Dumitru Ligia (86); **VALEA LEURZEI (DÎMBOVIŢA)** Ş. g. 2 cl. VI Bănulescu Emilia (60); **VALEA SEACĂ (NEAMŢ)** Ş. g. cl. V Apopei Daniela (18), Bălăoiu Ştefan (59), Cozma Constantin (37), Cozma Lucian (41), Iordachi Cristi (59), Savin Aurelia (38), Savin Mariana (126), cl. VI Roban Relu (122); **VASLUI (VASLUI)** Ş. g. 1 cl. VI Babaita Lenuţa (90), Leuştean Mihaela (58), Talapan Monica Elena (100), Tibuleasc Cristian (53); Ş. g. 2 cl. V Ciortescu Cezar-Gabriel (50), Costin George (77), Durcan Daniela (80), Grămadă Mona (61), Popa Carmen (76), Tudorachi Florin (123), cl. VI Acatrinei Simona (96), Bucur Mihaela (197), Chiriac Ofelia (65), cl. VII Chirilă Narcisa (100), Darie Rodica (94), Moeanu Valentina (91); Ş. g.3 cl. V Dorobăţ Cătălina Gabriela (163). Lăluci Mihaela (110), Moraru Mihaela (48). Pană Mihaela (113), cl. VI Aslan Antoaneta (86), Cireş Ovidiu (90), Cocea Ionela (81), Doniga Sebastian (181), Esanu Mădălina (87), Huiban Simona (91), Liteanu Carmen (103), Splnache Robert (100), cl. VII Boghiu Gabriela (90), Cozloschi Lucian (94), Dimitriev Laura (160), Riicescu Robert (105), Marian Liliana (125), Negruţi Cătălin (117), Popa Petronela (131), Ropota Radu (79), cl. VIII Huştiu Ionela (150). Marin Radu (117), Mercaş Cristinel (80), Miron Cătălin (119), Pencu Dragoş (117), Andrei Viorel (80); Ş. g. 4 cl. V Apetrei Teodora (73), Florescu Iulian (80), Ghinea Alin (80), Maftei Mihaela (73), Nedelcu Constantin (73), Richard Erika (145), Sîrbu Simona (160), Straub Mihaela (151), cl. VI Carabaş Loredana (139), Cotoranu Adnana (90), Grigoraş Cătălin (93), Iulian Horaţiu (68),Lăcătuşu Carmen (135). Lăcătuşu Mihaela (118), Polcovnicu Petronela (100), cl. VII Preutu Bogdan (100), cl. VIII Dajboc Nina (114), Pricop Mihaela (120); Ş. g 5 cl. V Bahrim Camelia-Corina (80), Bărbulescu Bogdan (100), Chirica Georgian (70), Craiu Elena (87), Darie Ion (76) Dumitruc Corina (110), Hîncu Oana (100), Ignat Florin (85), Jomir Constantin (100), Nitieă Laura (80), Păcuraru Răzvan (160), Silitră Crăiţa (99), Solomon Cristian (61), cl. VI Dima Radu (80), Fordea Cornelia (70), Galescu Mona (110), Mocanu Cătălina (105), Munteanu Mariae (209), Popa Camelia (120), cl.VII Chirica Daniela (134), Miron Nicoleta (70), cl. VIII Bahrim Dragoş (98), Costînceanu Lucian (80), Girneaţă Carmen (110); Ş. g. 6 cl. V Caramalău Sergiu (70), Gruia Cristian (79), Manolache Cristian (97), Picioragă Viorica (84), Şerban Silvia (98), cl. VI Burghelea Alina (88), Ciolacu Marius (110), Răclariu Alina (121), Safir Ciprian (90), Stavăr Simona (92), cl. VII Ciulei Cristina (60), Ciobotaru Romică (228). Cucu Valentin (75), Darie Adi (77), Daria Violeta (50), Frăţică Daniela (71), cl. VIII Grigoruţă Cătălina (97), Herea Iulian (100), Militelu Gabriela (100), Petreni Felix (77), Picioragă Viorica (87), Roznov Beatrice (180), Scutelnicu Gina (188); Ş. g. 7 cl. VII Vamanu Cristina Mihaela (84), Zurba Anda (96), cl. VIII Beldiman Mihaela (60). Drăguţ Carmen (90), Ciuraru Alin-Lucian (75); Ş. g. 8 cl. VI Iurăşcu Luminiţa (150), Popa Camelia (170), cl.VII Stan Gabriela (111), cl. VIII Dubovan Carmina (115); Lic. mat. fiz. „M. Kogălniceanu" cl. IX Bodescu Simona (131); Lic. ind. 2 cl. IX Rusu Camelia (167), cl. V Bursuc Severian (50), cl. VIII Pencu Dragoş (110);

VATRA DORNEI (SUCEAVA) Ş. g. 4 cl. V Asurdoaie Mariana (59), Covalschi Camelia (49), Jula Ciprian (100); **VAŢA DE JOS (HUNEDOARA)** Ş. g. cl. V Miţiu Lavinia (66), cl. VI Suba Rodica (175); **VĂDASTRA (OLT)** Ş. g. cl. VI Rădulescu Lavinia (103); **VIPEREŞTI (BUZĂU)** Ş. g. cl. VI Mihai Mircea (309); **VIŞEU DE SUS (MARAMUREŞ)** Ş. g. 1 cl. IV Ardelean Manuela (50); Hontău Bogdan (100); **VOINEŞTI (DÎMBOVIŢA** Ş. g. cl. VI Marinescu Diana (70); **VULCAN (HUNEDOARA)** Ş. g. vl. VI Luntraru Geanina (87), Palimaru Cătălin (78), Popa Dorin (82), Stancu Daniel (78), cl. VII Cetean V. (93), Damian Romeo (108), Fara Nicolae (69), Pigui Simona (119), Rusu Vladimir (79));

ZALĂU (SĂLAJ) Ş. g. 1 cl. V Ciobanca Delia (59), Cunescu Cristina Meda (80),Man Gabriela (67), Olaru Sebastian (39), cl. VI Pop Monica Adriana (50), Sabău Claudia (59), Lenghel Liliana (50)), Sipoş Manuela (50), Tamaş Paul (39), Vintilă Marius (50), cl. VII Barbur Claudiu Dan (47), Cristoltan Loredana (60), Haiduc Gabriela (50), Sârb Oana (70), Vais Luminiţa (60); Ş. g. 4 cl. VI Pop Cristina (104), Prodan Cristian (104); Ş. g. 5 cl. V Adorian Zoltan (69), Bociuman Camelia (60), Clapă Valeutina (59); Ghiuruţan Mihaela (65), cl. VI Oprea Carmen (120), Petre Cristian (86), Pop Ioan (50), Turian Alina (104), Vaida Bianca (128), cl. VII Chibzu-Ioiu Carla (156), Trif Flaviu Viorel (95); Ş. g. 7 cl. II Baidoc Mihai (100), Cretu Miriam (100), Fiordean Dacian (105), Moşilă Carmen (110), Prodan Ionuţ (115). Paniac Rodica (100), Poţiu Ancuţa (100), Strimb Anca (105), cl. VI Prodan Alina (130), Merloi Cecilia (246), Merloi Octavian (57), cl. VI Benedek Robert (34), Chezan Anton (45), Marian Claudia (64), cl. IX Harda Luiza (100), Grindean Mihai (57), Milonean Sorin (60); Lic. mat. fiz. cl. V Iureş Adela (90), Bikzolvi Elvira (149), Bălănescu Tatiana (65), Alexuţan Cristian (87), cl. VII Ilarda Luiza (100), Grindean Mihai (57), Milonean Sorin (60); Lic. mat. fiz. cl. V Iureş Octavian (57), cl. VI Benedek Robert (34), Chezan Anton (45), Marian Claudia (64), cl. IX

Scanned with OKEN Scanner

Abraham Dorina (120), Ardeleanu Dana (80), Baboş Mihaela (120), Halmaghi Smaranda (100), Mezei Helga (80), Petrea Codruţa (80), Puşcaş Smaranda (100), Remeş Alin-Ovidiu (100), Simoş Carmina (120) : fără menţiune de şcoală : cl. V Andreea Dumitraşcu (80), Ionescu Florin (34), cl. VII Petrea Viorel (70), Săvuş Ioana (60), Ciorba Claudia (50), Haţegan Marius (34), Piţoiu Ioana (70), Sas Octavian (60).

ALBA IULIA (ALBA) Lic. de mat. fiz. „Horia, Cloşca şi Crişan" cl. X Cimponeriu Adrian (120) ; **ALEXANDRIA** (TELEORMAN) Ş. g. 2 cl. VI Stan Cristian (40) ; Ş. g. 3 cl. V Ionescu Alina Corina (95), Şerbănescu Liviu (90), cl. VIII Cioc Pompiliu (80). Oprescu Nicolae (80) ; **ARAD** (ARAD) Ş. g. 1 cl. VI Dan Monica (103) ; Ş. g. 4 cl. V Cheţa Cristina-Alina (215) ; Ş. g.12 cl. V Dragoş Delia Carla (51) ; Lic. ind. 12 cl. VI Gynes Cezar (68), Onoiu Monica (80), cl. VII Boţa Mihaela (80) ; Lic. „I. Slavici" cl. VI Verzea Onorina (190), cl. VIII Verzea Valentin (167) ; **AZUGA** (PRAHOVA) Ş. g. cl. V Diaconu Marilena (66), Popescu Daniela (61), cl. VII Vlad Renata (70), cl. VIII Oprea Daniela (100), Sanciu Gabriela (169).

BACĂU (BACĂU) Ş. g. 5 cl. V Preda Radu (60) ; Ş. g. 10 cl. VII Geangu Irina (41) ; Ş. g. 11 cl. III Munteanu Crina (40), cl. VI Munteanu Monalisa (40) ; Ş. g. 16 cl. V Strujan Cristina (45) ; Ş. g. 18 cl. V Mitocariu Cristina (59) ; Ş. g. 19 cl. VI Donea Constantin (50), Jămneală Diana (47) ; Ş. g. 20 cl. VII Tinteanu Cristina (105) ; Lic. ind. 3 cl. IX Dionisă Mario (130), Grecu Mirela (47) ; fără clasă indicată ; Stoica Iuliana (40) ; Lic. „G. Bacovia" cl. IX Bercu Cătălina (40). cl. X Popa Marius (180) ; fără şcoală şi clasă indicate : Bernevig Codrin (48) ; **BAIA DE FIER** (Gorj) Ş. g. cl. III Rădoi Cristina (93), cl. IV Andronescu Simona (100), Cioplan Iuliana (108). ; fără menţiune de clasă : Belu Ion (110) ; **BAIA MARE** (MARAMUREŞ) Ş. g. 14 cl. VI Bogza Liana (41), Dan Silviu (60), Tămîian Daniela (120) ; Ş. g. 17 cl. V Mesaroş Călin Octavian (88), Sabou Ana (73), Seliceanu Amalia (88) ; **BALAN** (HARGHITA) Ş. g. 2 cl. VII Szakacs Carmen-Simona (98) ; **BECLEANU** (BISTRIŢA-NĂSĂUD) Ş. g. cl. V Danciu Melania (59) ; **BEIUŞ** (BIHOR) Ş. g. cl. VI Mocuţa Cristian (195). cl. VII Făsie Radu (143), Geterky Cecilia (100), Ienciu Alina (130), Mazilescu Daniela (139), Naghiu Antonius (149), Nistor Alina (100) ; Lic. „S. Vulcan" cl. VI Borz Claudiu (120), cl. VII Stanciu Claudia (96), cl. VIII Boldor Marius (91), Domocoş Gabriel (78), Tomele Cristina (115), Vesa Mihaela Adriana (100), cl. IX Dobre Cornel (98), Muşet Speranţa (81) ; **BERCENI** (GIURGIU) Ş. g. 1 cl. VII Vilcu Cezar Ninel (97) ; **BÎRLAD** (VASLUI) Ş. g. 8 cl. V Diaconescu Emil (30)., cl. VI Pavel Gabriel (87) ;

BOTOŞANI (BOTOŞANI) Ş. g. 7 cl. VI Apetrei Gabriel (127), Braşoveanu Artur (125), Ochişor Anca Mihaela (100), cl. VII Ostin Cătălin (120), Tomiţă Marcel (163) ; Ş. g. 8 cl. VIII Ojog Lucian (30) ; Ş. g. 13 cl. V Aniţei Ioan (99), Bejinaru Claudiu (78), Lăzurcă Vasilica (98), Piuleac Corneliu (78), cl. VI Pînzaru Willi (120) ; **BOZOVICI** (CARAŞ SEVERIN) Ş. g. cl. VI Gurulescu George Cristian (92), Micicoi Floarea-Ana (58) ; **BRAŞOV** (BRAŞOV) Ş. g. 5 cl. V Lazăr Răzvan (60), cl. VI Tira Adrian (180), cl. VII Lazăr Diana (60), Păvălucă Monica (110), cl. VII Lazăr Alina (76), Marinache Mirela (50), Pernea Rodica (120) ; Ş. g. 15 cl. V Burlacu Elena Lucia (10) ; Ş. g. 22 cl. VI Simion Mihaela (135). cl. VIII Ene Alina-Luana (97) ; Ş. g. 26 cl. V Măicăneanu Bianca (41) ; Ş. g. 27 cl. V Pistol Romică (48) ; Lic. „Honterus" cl. XI Dumitru Adrian (250) ; **BRĂILA** (BRĂILA) Ş. g. 6 cl. V Vizireanu Nicoleta (26), Vodă Remus Ştefan (25), cl. VI Mocanu Adrian (22), Stan Corina (30) ; Ş. g. 7 cl. V Brătan Otilia (49) ; Ş. g. 10 cl. VIII Constantin Cosmin (101) ; Ş. g. 22 cl. VIII Perfenie Cornelia (194) ; Ş. g. 29 cl. V Naşca Claudia (69), cl. VI Pletea Mihaela (100), cl. VII Cochino Adina(131) ; Lic. „Progresul" cl. XI Neică Manuela (132) ; **BREAZA** (PRAHOVA) Ş. g. cl. VI Lazăr Melania (120) ;

BUCUREŞTI (BUCUREŞTI) Ş. g. 11 cl. VII Popescu Patrick (280) ; Ş. g. 15 cl. V Bunea Marilena (18), cl. VII Popescu Ioana (360) ; Ş. g. 49 cl. V Candiani Ruxandra (180), cl. VI Patron Maria-Cristina (154) ; Ş. g. 56 cl. VI Smărăndoiu Liviu (250) ; Ş. g. 57 cl. VIII Florian Radu (130) ; Ş. g. 62, cl. VII Vilcu Mihaela (83) ; Ş. g. 76 cl. VIII Tomescu Dan-Alexandru (107) ; Ş. g. 113 cl. VII Ionescu Andreea (99) ; Ş. g. 156 cl. V Barbu Silvia (60), Călugăru Simona (60), Caniola Albert (20), Dumitrescu Robert (24). cl. VII Burteanu Nicolae (30), Ştefanciuc Cristina (34) ; Ş. g. 180 cl. V Martolea Gabriela (27) ; Lic. mat. fiz. 3 cl. X Maglaviceanu Bogdan (32) ; Lic. „I. L. Caragiale" cl. IX Barna Bogdan (80), Crişu Beatrice (99), Dudu Viorica (80), Jacob Simona (99), Nicolescu Cătălin (90), Petrescu Denisa (50), Vladimir Andreea (90) ; Lic. fil. ist. 1 cl. VI Ciobanu Ruxandra (200) ; fără menţionare de şcoală cl. VI Stuparu Mihai (145), cl. VII Georgescu Daniela (99). **BUHUŞI** (BACĂU) Lic. ind. cl. X AndreiAdrian (156) ; **BUNTEŞTI** (BIHOR) Ş. g. cl. VII Pîrtea Rodac (100), Dana Maria (100) ; **BUŞTENI** (PRAHOVA) Ş. g. 2 cl. V Găman Angelica (100) ;

CARACAL (OLT) Ş. g. 2 cl. VII Cranta Lorellay (128), cl. VIII Bildea Nicoleta (90), Dinu Loredana (110), Tătaru Adela (228) ; Ş. g. 4 cl. VI Hoară Mădălina (95) ; Ş. g. 5 cl. V Barbu Daniela (57), cl. VI Heson Cătălin (105), Stan Cornel (194), Voicu Ionuţ (149) ; Ş. g.6 cl. VI Nedelciuc Doina (170) ; **CARANSEBEŞ** (CARAŞ-SEVERIN) Ş. g. 8. cl. VI Boteş Mihaela (79) ; **CĂLĂRAŞI** (IALOMIŢA) Ş. g. 1 cl. VI Neagu Cătălin (60) ; Ş. g. 4 cl. V Ionescu Narcisa (150). Stoica Marian (90), cl. VI Anghel Monica (114), Culea Mariana (134), Decu Mihaela (276), Ştefănescu Lucian (244), Pop Codruţa (64), cl. VII Borza Silviu (105) ; **CERNAVODĂ** (CONSTAN-

Scanned with OKEN Scanner

ŢA) Ş. g. 4 cl. VI Cristache Nadina (110) : **GERVENIA (TELEORMAN)** Ş.g. cl. V Palea Monica (50) ; **GIOCĂNEŞTI (ARGEŞ)** Ş. g. cl. V Boian Ileana (86), Onicioiu Elena (100), Paraschiv Dumitru (70) : **CIREŞU (BRĂILA)** Ş. g. cl. V Piţa Orlansa (150), Turtoi Magdalena (130) ; **CIZER (SĂLAJ)** Ş. g. 1 cl. VI Criste Angelica (70), Criste Dorina (70), Gudea Nicoleta (70) ; **CÎMPENI (ALBA)** Ş. g. cl.V Crişan Petru (110), cl. VI Joldiş Tiberiu (222) ; **CÎMPIA TURZII (CLUJ)** Ş. g. 5 cl. V Istrate Călin (60) ; Lic. ind. cl. IX Onişcer Ovidiu (110) :

CÎMPINA (PRAHOVA) Ş. g. 1 cl. VI Bilcan Cătălin (68), Ivaşcu Astrid (59), Stan Ion (60), Stoian Iulian (79) ; Ş. g. 2 cl. V Ghiru Lăcrămioara (46), cl. VI Parasciuc Raluca (70), cl. VII Cristache Loredana (106), Paşcu Manuela (104), Rus Dan (120), Tepuş Roxana (110) ; Ş. g. 4 cl. V Vişan Sorin (50), cl. VI Budală Adrian (130), Chiţu Cristian (101), Crăciun Cosmin (109), Tănase Gabriela (190) ; Lic. „N. Grigorescu" cl. IX Bosiceanu Raluca (120), Mocuţa Dan (170), Petre Paula (105), Stoicescu Laura (140), Toader Anca (125) ; fără menţiune de şcoală : cl. V Padin Gabriel (49) ; **CÎMPULUNG MUSCEL (ARGEŞ)** Ş. g. 5 cl. VI Frătoaica Marius (100), Ungureanu Marius (50), Vişoiu Răzvan (30) ; **CLUJ-NAPOCA (CLUJ)** Ş. g. 3 cl. VII Cimpean Laurenţia (130) ; Ş. g. 6 cl. IV Pintea Mihaela (160), cl. V Bărăian Sergiu (120), Netea Ioan (90), cl. VI Beju Daniel (50), Centea Marius (120), Gabor Adriana (190), Heţea Maria (120), Morar Voichiţa (100), Pintea Bogdan (120), Pop Gheorghina (93), Pulbere Ciprian (73), Rodilă Paul (87), cl VII Achimaş Sorin (100), Ciobotaru Camelia (80), Drăgan Daniela (105), Heţea Maria (105) ; Ş. g. 17 cl. VI Vlădău Ioana (120) ; Ş. g. 18 cl. V Nistor Codruţ (160) ; Ş. g. 23 cl. VII Giloan Mirca (110) ; Lic. arte plastice cl. VI Paşcu Ştefana (107), Ursuţin Călin (79) ; Lic. „E. Racoviţă" cl. V Trenţiu Cosmin (82), cl. VIII Coman Horia (100) ; Lic. şt. naturii cl. VI Selinger Andreea (100) ; Lic. ind. „G. Coşbuc" cl. VI Boila Paula (275), cl. VII Oprea Simiona (145), cl. VIII Boila Paula (1120) ; Lic. ind. „N. Bălcescu" cl. VIII Leţin Andrei (120) ; Lic. mat. fiz. 2 cl. IX Niţchi Doina (175) ; Lic. ind. „Gh. Barițiu" cl. IX Frenţiu Alin (100) ; Lic. ind. „Tehnofrig" cl. IX Hoalgă Ştefan (130) ; **COMĂNEŞTI (BACĂU)** Ş. g. 5 cl. VI Vrânceanu Manuela (110) ; **COMIŞANI (DÎMBOVIŢA)** Ş. g. 1 cl. VI Coman Daniel (30) ;

CONSTANŢA (CONSTANŢA) Ş. g. 12 cl. V Dumitrescu Camelia (78), Sadrapeli Lavinia (80) ; Ş. g. 16 cl. VI Nicolescu Larisa (105), cl. VII Ghiu Silvana (150), Negruţ Emanuela (118), cl. VIII Ziadiu Filip (90) ; Ş. g. 24 cl. II Chiazim Ştefan (40) ; Ş. g. 29 cl. VI Deji Codruţ (235) ; Ş. g. 30 cl. VII Sburlan Alina (30) ; Ş. g. 34 cl. V Enache Cătălin (60), Goiceanu Florin (60), Ismail Altan (57), cl. VI Scinteie Nicoleta (46) ; Ş. g. 38 cl. V Negulescu Alina (87) ; Ş. g. 40 cl. VI Dănăilă Laura (50) ; Ş. g. 42 cl. VII Andrei Ion (193) ; Lic. „Mircea cel Bătrîn" cl. X Dochie Florina (96), cl. XI Ali Severius (42) ; **CORABIA (OLT)** Lic. ind. chimie cl. IX Popa Gabriela (60) ; **COSTEŞTI (VÎLCEA)** Coman Crenguţa (100), Constantinescu Alina (150) ; Ş. g. 21 cl. V Marin Ecaterina (110), c. VI Bucă Dan (112), Candescu Amalia (140), Caghiaş Cristina (147), Dafina Gabriel (120), Dumitru Amalia (70), Florescu Mihai (120), Predescu Florin (140), Tămăşescu Mihai (105), Săndulescu Cosmin (138), Tudoran Octavian (90), cl. VII Teodorescu Dan (150) ; Ş. g. 22 cl. V Tobă Mihai (100), cl. VI Andronescu Daniela (70), Nicu-Iescu Decebal (100), Zdurcea Manuela (100), cl. VII Andronescu Anne (100), Bălaţă Crina (90), Bătineanu Tori (88), Calană Cătălin (100), Chiloni Camelia (70), Ciorcotă Narcisa (120), Cîrstea Alina (100), Dimoiu Iulia (100), Dragomir Daniela (100), Ilie Adriana (80), Nicola Magda-lena (108), Pavel Mădălina (95), Pîrvulescu Robert (100), Poenaru Ilie (100). Radu Gabriela (70), Răcăreanu George (80), Sfîrlogea Daniel (70), Udrea Cornel (100), Voinea Daniela (70), cl. VIII Cruceru Aurelian (57) ; Ş. g. 30 cl. V Cotfasă Oana (90), cl. VII Dumitru Cristiana (100) ; Ş. g. 31 cl. V Fărcăşanu Irina (88), Ioana Mihaela (109), cl. VI Păţuleanu Diana (69), cl. VII Drăgancea Mădălin (80) ; Ş. g. 32 cl. V Militaru Adrian (100), cl. VI Bîbălău Iulian (88), Coşoveanu Costinel (60), Dobrică Mircea (89), Potbăniceanu Dana (55), Rădulescu Ileana (90) :

CRAIOVA (DOLJ) Ş. g. 2 cl. V Savin Diana (70) ; Ş. g. 9 cl. VI Cividjian Andrei (119), Mateescu Radu (180) ; Ş. g. 10 cl. V Maidin Jana (78) ; Ş. g. 11 cl. V Andgel Marilena (70) ; Ş. g. 18 cl. IV Zameit Mircea (20) ; cl. VI Niţu Soria (56) ; Ş. g. 33 cl. V Bezerghian Adrian (46) ; Lic. ped. cl. V Dumitrescu Marilena (150), Hoador Vasile (45), Rusinaru Cătălin (91), cl. VI Ştefănescu Andreea (62) ; Lic. „Fraţii Buzeşti" cl. VI Badea Daniela (120), Gheorghe Monica (150), Lazăr Mihaela (134), Nuţă Nadia (141), Purcărescu Crenguţa (129), Manu Marian (119), Şerban Gabriella (150), Zanfir Cristian (156), cl. VII Lepădat Alma (87), cl. VIII Anghelina Radu (208), cl. X Savin Horaţiu (120) ; Lic. „N. Bălcescu" cl. VII Săteanu Ramona (90), cl. IX Segărceanu Laura (829), Tătar Radu (582), Vasilicanu Radu (74) ; Lic. ind. 1 cl. IX Pavel Mădălina (140) ; Lic. „T. Vladimirescu" cl. IX Cotigă Ştefan (150), cl. X Radu Daniel (170) ; Lic. Militar cl. X Teodorescu Paul (150) ; **CUGIR (ALBA)** Ş. g. 2 cl V Sinea Cosmina (78), cl. VI Aldea Monica (110). Ghihoi Andreea (90), Neagu Simona (103) ; **CURTEA DE ARGEŞ (ARGEŞ)** Ş. g. 1 cl. III Calotă Cătălina (70), cl. IV Ionescu Monica (148), cl. VII Simion Adrian (96) ; Ş. g. 5 cl. VI Bulac Adrian (160), cl. VII Pletea Marian (141), Velea Ana (230) ; Ş. g. 6 cl. V Mateescu Mădălina (256), Mihăescu Diana (178) ; Lic. „Vlaicu Vodă" cl. XI Tuţă Diana (100) ;

Scanned with OKEN Scanner

DĂNEȚI (DOLJ) Ș. g. cl. VI Bădan Constantin (110); DRĂGĂNEȘTI OLT (OLT) Ș. g. 1 cl. V Popa Sorin (84); DROBETA-TURNU SEVERIN (MEHEDINȚI) Ș. g. 2. cl. V Beze Laviniu (80), cl. VI Tudor Simona (30); Ș. g. 3 cl. V Durac Cosmin Gabriel (52), Simeclescu Melania (50), Vasilescu Mihaela (86), cl. VII Hossu Alina (111), Popescu Cristina (59), Vișan Amalia (30), cl. VIII Nițulescu Cristian (98); Ș. g. 4 cl. V Roman Decebal (103), cl. VII Tudor Viorel (48), cl. VIII Dragavei Florinel (90); Ș. g. 8 cl. VII Cismaru Petrică (90), Cristea Ileana (81), Lică Adrian Dantă (59); Ș. g. 9 cl. V Neacșu Robert (49); fără menționare de clasă și școală: Uroveanu Delia (90); DEJ (CLUJ) Ș. g. 1 cl. VI Pop Teona (90); Ș. g. 3 cl. V Pop Elena (66), Sandru Lavinia (70), cl. VI Matei Laviniu (48), Măgurean Liana (100), Pop Remus (89), cl. VII Jopan Liana (80), cl. VIII Romega Daniela (116), Spermezan Sorina (120); Lic. „A. Mureșan" cl. X Peter Radu (109); DRĂGĂȘANI (VÎLCEA) Ș. g. 2 cl. VI Gruescu Sorina Adelina (126); DUDEȘTII VECHI (TIMIȘ) Ș. g. cl. VII Budur Petre (117); DUMBRĂVENI (SUCEAVA) Ș. g. cl. V Filote Mihai (40);

FĂGĂRAȘ ((BRAȘOV) Ș. g. 6 cl. VIII Lazea Diana (135), cl. XI Cornea Ciprian(108); FĂGET (ARAD) Ș. g. cl. VI Peicuți Cosmina (178); FĂLCIU (VASLUI) Ș. g. cl. VII Andrei Nicolae (138), Ispas Mihai (125); FĂLTICENI (SUCEAVA) Ș. g. 1 cl. VI Cojocariu Romeo (97), Ghionea Gina (100); Ș. g. 3 cl. VI Deuceneșcu Corneliu (50), Frincu Mirela (50), Tipău Adrian (50), Vrinceanu Daniela (117); FĂUREI (IALOMIȚA) fără mențiune de școală: Antofe Romeo (78); FELDIOARA (VRANCEA) Ș. g. cl. VII Blaga Mariana (69), Gealee Daniela (65); FETEȘTI (IALOMIȚA) Ș. g. 7 Gavrilă Rodica (110), Sonel Loredana (95), cl. VII Ogrezeanu Marilena (20), Răduță Ovidiu (39), Prunduș Carmen (100), Tudor Adriana (52), Vlad Amalia (110); FÎNTÎNA MARE (CONSTANȚA) Ș. g. cl. V. Moșneagu Ovidiu (48); FLOREȘTI (ILFOV) Ș. g. cl. V Stanca Onorica (50), cl. VII Birsan Elena (32), Vasile Radu (100), cl. X Tudose Adrian (166); FOCȘANI (VRANCEA) Ș. g. 1 cl. V Zălaru Valentina (70); Ș. g. 2 cl. V Mocanu Luminița (300), cl. VI Ghionea Gina (100); Ș. g 5 cl. V Aciocesei Sorina (60), Rafail Florentina (65); Ș. g. 7 cl. VI Dumitrescu Nicoleta (50), Gurită Laurențiu (40), Mănăstireanu Raluca (88); Ș. g. 8 cl. III Enciu Liliana (130), Țugui Steluța (10), cl. VII Florica Melania (130), Tiflea Florentina (74); Ș. g. 9 cl. V Băcanu Dan (60), Bosnea Dragoș (90), Cârstea Mihail (20), Comănescu Simina (56), Huiban Oana (68), Mocanu Cosmin (87), Vasiliu Ana (90), cl. VI Crețu Valentina (181), Găman Daniela (102), cl. VII Chelmuș Cristina (70); Ș. g. 10 cl. II Bădălan Ștefan (100); Lic. „Unirea" cl. IX Cristea Eduard (63), Diaconiță Valentin (96), Lupu Valentin (63), Potlog Liviu (92), Răileanu Sorin (70), cl. X Chiriac Gabriel (208), Costache Marian (70); Gheorghe Cornel (92), Staicu Vasile (100); Lic. „Al. I. Cuza" cl. IX Costeschi Silvia (155), Ioniță Bogdan (50), Jelea Pavel (70), Lupu Radu (169), Sîrbu Dan (204), cl. X Căruntu Daniel (64), Dumitrache Iuliana (48), Militelu Cătălin (220), Nazarie Geanina (420), cl. XI Sîrbu Dan (204), cl. XII Costeschi Marius (305); fără mențiune de școală: Ghoba Salomeea (40), George Anca (21), Gurită Laurențiu (40), Mănăstireanu Raluca (50); FRATOȘTIȚA (DOLJ) Ș. g. cl. VII Dobre Ion (30); FRINCEȘTI (VÎLCEA) Ș. g. cl. VII Tăcutu Bogdan (120);

GALAȚI (GALAȚI) Ș. g. 6 cl. V Bazgu Antoni Bogdan (63), Bostan Ana-Daniela (60), Gliga Diana Camelia (60), Manea Ingrid (74), Neghină Sorin (45), Ogigău Maria (85), Vasilache Marian (42), Voina Laura (56) cl. VI Drăghici Marius (120), Giușcă Claudiu (181), Ionescu Traian (100), Penișoară Gigi-Gian (32), Sprinceană Gabriela (96), cl. VII Bîrleanu Sorin (103), Caracostea Gabriela (121), Diau Lucian (50), cl. VIII Balais Cristina (100), Palihovici Răzvan (93); Ș. g. 7 Ghilea Simona (30); Ș. g. 10 cl. V Amariei Rodica-Irina (133), Barbu Lăcrămioara (60), Cristea Mihaela (130), Matei Dănuț (111), Peceli Daniela (66), Radu Cristinel (68), Sava Ciprian (64), Tiliboi Cristian (68), Toma Violeta (70), Vasiliu Ioana (70), Vintea Daniela (50), cl. VI Cosoreanu Mihaela (80), Lungu Iulia (76), Plângе Cornelia (97); Ș. g. 12 cl. VII Giușcă Luminița (110); Ș. g. 16 cl. V Raicea Monica (68); Ș. g. 18 cl. V Chirilă Cristina (51), Diaa Ionela-Carmen (29), Mihai Mihaela (61), Nită Mioara (22); Ș. g. 21 cl. VII Dragu Florin (74); Ș. g. 24 cl. V Ionescu Viorica (44), Mitu George (80), Samoilă Florin (99), Tănăsescu Camelia (80), cl. VI Arsene Cristian (117), Iova Diana (85), Nat Laurențiu Cristian (140), Nițu Ștefan Iulian (116), Pîrvulescu Alina(89), Stanciu Carmen (52), cl. VII Brînză Mihai (110), Gogelan Carmen (95), Hlacu Camelia (105), cl. VIII Ariton Mihaela (91), Costea Silvia (98), Horovei Vianela (100); Ș. g. 25 cl. V Aramă Petrică (68), Bogei Maple-Christiane (97), Călina Oana (70), Chiriluță Tiberiu (96), Ciupitu Vasile (96), Gheller Adrian (200), Gheller Daniel (100), Irimia Oana (95), Mihai Iuliana Delia (180), Mocanu Andreea-Daniela (64), Mocanu Anicuța (70), Munteanu Răzvan (90), Palade Ana Maria (74), Sabău Cristina-Daniela (143), Scarlat Geanina (79), cl. VI Costin Valentina (130), Lificiu Cristina (120), Marian Mona (175), Moșinschi Nicoleta (110), cl. VII Copil Paul Marius (114), Mînăscurtă Gabi (132), Mocanu Doina (250), Petrican Antigona (108), Popa Cornelia (146), cl. VIII Bubolu Violeta (84), Constantin Iulian (230), Dațcu Adoline (100), Munteanu Marius (90); Ș. g. 26 cl V Lungulescu Giulia (69); Ș. g. 28 cl. V Budur Monica (100), Cristofor Adelina (100), Krauser Mădălina (175), Leibovici Andy-Rada (100), Moisaratu Andreea (100), Nicu Marius (110),

Scanned with OKEN Scanner

Miloș Cristian (100), Otta Georgia Roberta (49), Pascaru Eduard (89), Popa Cătălin Valentin (87), Popescu Gabriela (99), Popoiu Radu Adrian (65), Tănase Raluca (119), cl VI Bălan Cătălin (13), Chira Corina (91), Epureanu Bogdan (200), Gradea Cristina (36), Munteanu Mihaela (137), Pleșa Ioana (80), Pojoga Florina (110), Pojoga Roxana (110), Zamfir Carmen (120), cl. VII Bălan Geanina (80) Dobocan Diana (150), Popa Cătălin (127), Popescu Gabriela (169) Popoiu Bogdan (168), Stanciu Carmen (150), Stanciuc Simona (93), Tatulici Andrei Mihai (150), Topciu Georgeta (42), cl. VIII Chiculiță Dana (70), Dolteanu Irina (125), Luca Victor (129), Preda Valentin (168), Trandafir-Corina (238) ; Ș. g. 29 cl. V Burlan Carmen Nicoleta (350) ; Ș. g. 33 cl. V Mocanu Bogdan (58) ; Ș. g. 38 cl. V Dumitru Gabriela (58) ; Ș.g. 40 cl. VI Gingărașu Mihai (90) ; Ș. g. 41 cl. V Cristea Elena (60), Mocanu Marius (50) ; Ș. g. 42 cl. V Balcanu Magdalena (73), Boros Nelu (80), cl. VI Bîrlădeanu Marlena (100), Costea Gabriela (80), cl. VII Irimia Tudorel (85), Ivu Ana Maria (231), Tudorică Sorin Adrian (90) ; Lic. ped. cl. V Tiberiu Negreanu (90) ; Lic. C.F.R. cl. IX Haleschi Cristina (50) ; fără mențiune de clasă : Ș. g. 6 Dan Cristian (66), Ș. g. 24 Ioan George Petrișor (98) ; Ș. g. 25 Pelcu Elena Florinela (130), Ș. g. 28 Gurău Paul (80) ; fără mențiune de școală : cl. VIII Munteanu Cătălina (163).

HARGHITA (HARGHITA) Ș. g. cl. VII Cosac Gabriela (70) ; HAȚEG (HUNEDOARA) Ș. g. 2 cl. V Stanciu Cătălin (146), cl. VI Barnea Ioana (100), Diana Claudia (120), Moisoni Daniel (126) ; HIDA (SĂLAJ) Ș. g. cl. VI Drăgan Daniela (80), Hurekez Harietta (76).Păcurar Mariana (78), Simpetrean Cătălin (80) ; HOCIUNGI (NEAMȚ) Ș. g. cl. V Ghimpu Corina (90), cl. VI Ciocan Gabriel (76), Crenganiș Viorica (60) ; HUNEDOARA (HUNEDOARA) Ș. g. 7 cl. V Cojocaru Călina (90), cl. VI Lazăr Cătălin (100), Constantin Mihaela (110) ; Lic. mat. fiz. cl. VI Făiniș Camelia (49), Feher Lavinia (60), Fiath Eugen Gabriel (70), Konez Adalbert (70), Poenaru Antoanela (60), Rădoc Simona Diana (49), Spătaru Tudor Eduard (59), Ștefan Rareș (70), Tripa Andreea (50), Varga Adriana (50) ; HUȘI (VASLUI) Ș. g. 1 cl. V Tolontan Monica (87), Tenu Carmen (89), cl. VI Aelenei Irina (83), Andronache Cătălina (65) ; Ș. g. 2 Ciupilan Corina (180), Cocîrtă Iulian (185), Condurache Mădălina (158), Harnagea Victor (99), Lazăr Laura (82), Macarie Gabriela (86). Scurtu Mihaela (58) Tănase Maricica (78), cl. VI Avram Cătălin (70), Berica Mioara (90), Buda Gelu (90), Cristea Anca (120), Danciu Cristina (198), Dănilă Adrian (150), Enache Manuela (104), Filon Gabriela (129), Harnagea Victor (86), Marian Elisabeta (86), Mihu Daniela (104), Oprișan Nicu Adrian (87), Savin Natalia (106), Sîetcu Ghena (108), Sînfbotin Daniel (88). Stoian Cătălin (95), Stoian Vasile (109), cl. VII Ciupilan Mihai (110), Maftei Lăcrămioara (110), Miu Cristina (78), Mocanu Ilie (100), Moldoveanu Costel (100), Popa Anca (94) ; Ș. g. 3 cl. V Mihalache Lucian (59), cl. VII Macovei Cristina-Daniela (89), Vălcanu Anca (100), Vrabie Daniela (120) ;

IAȘI (IAȘI) Ș. g 3 cl. V Dănilă Iuliana (80), Roman Florin (50) ; Ș. g. 6 cl. V Manea Ingrid (49) ; Ș. g. 7 Negrescu Mihaela (105) ; Ș. g. 10 cl. V Grigoriță Petronela (68), Hadîmbu Marius (65), Miron Cristina (71), Teodorescu Laura (88), cl. VII Bejenaru Irina (87), Tărzioru Mihaela (90) c. VIII Gagea Cristian (98) ; Ș. g. 13 cl. V Butnaru Lucian (58), Drăguș Cătălin (50) Durac Petronel (89), cl. VI Manole Iulian (66) ; fără mențiune de clasă : Băcăiță Lucian (80), Mocanu Loredana (80) ; Ș. g. 22 cl. V Andrieș Ioana (90), Artenie Alexandru (95), Coba Cătălin Eugen (180), cl. VI Botez Irina (155), cl. VII Manole Alina-Mihaela (57) ; Ș. g. 24 cl V Ghițescu Alina (60) ; Ș. g. 31 cl. IV Alexandrescu Mihaela (145). Brumaru Andreea Despina (100), Buzatu Pavel (170). Ceacoschi Corina (240). Ciobotaru Marcel (70), Popa Bogdan (74) ; Ș. g. 37 cl. IV Palaghiu Radu (210) ; Lic. „M. Eminescu" cl. IV Georgescu Ionuț (50), Lic. „G. Ibrăileanu" fără mențiune de clasă : Linde Cristina (40) ; Lic. Informatică cl. IX Lăduncă Lucian (59) ; Lic. „Național" cl. V Albu Irina (114), Andronic Asina (48), Bulbașa Veronica (68), Fotea Ana-Maria (70), Gutanu Petronel (75), Hameiuc Cătălin (93), Harabagiu Adrian-Nicolae (77), Militaru Mădălina (90), Rotărescu Alina (70), Ruscanu Rodica (115), cl. VI Aflori Cristian (50), Bejan Maria Magdalena (108), Costin Camil (87), Cozloschi Florin (47), Lăzărescu Sanda (92), Mihailovici Livia (70), Mitruță Carmen (34), Panaite Everaldo (179), Pavel Oana Virginia (158). Pekar Cătălin (93), Preolu Alin (170), Stiglet Cătălin (30), Ungureanu Diana-Iuliana (80), Vieru Radu (154), Vîlcu Ioan (170), cl. VII Bordea Lăcrămioara (115), Buruiană Mihai (100), Călu anu Maria Călina (756), Căruceru Oreste (49), Ciocăuel Alexandru (130), Durămuț Valeriu (107), Garabedeanu Ilinca (97), Grămescu Lucian (70), Homutescu Camelia (62), cl. VIII Poterașu Victoria (70) ; fără mențiune de clasă : Plenovici Florentin (68) ; Lic. „C. Negruzzi" cl. V. Brezuleanu Bogdan (58), Grădinaru Vasile (140), Lucan Eugen (62), cl VI Iftimescu Alina (83), Turinici Gabriel (180). cl. VII Gilibiu Valentin (30), Dascălu Simona (30), Bulacovschi Ilie (85), cl. VIII Nechita Remus Iulian (150), Rubin Beatrice (78), cl. XI Apreutesei Gabriela (132) ; Lic. „E. Racoviță" cl. VI Anton Alina (98), Barnea Corina (82), Blidaru Anton (156), Costin Irina Petronela (192) Florea Bogdan (133), Răsina Irina (90), Molie Alina Nicoleta (200), Stratulat Dana (132), cl. VII Maftei Irina (110) ; fără mențiune de școală : Slătineanu Sebastian (170) ; SLVA MARE (BISTRIȚA-NĂSĂUD) Ș. g. 1 cl. V Sas Simona Diana (79) ; INĂU (SĂLAJ) Ș. g. Boda Ioan (120) ; INEU (ARAD) Ș. g. Todincă Ioana

Scanned with OKEN Scanner

Corneliu (266) : **IZBICENI** (OLT) Ş. g. cl. V Mogoş Alin (85) ; **ÎNSURĂŢEI** (BRĂILA) Ş. g. 2 cl. VIII Drăghici Cătălina (110) ;

LĂPUŞ (MARAMUREŞ) Ş. g. 1 cl. VII Călina Alina (50) : **LEHLIU GARĂ** (CĂLĂRAŞI) Ş. g. cl. V Tudose Cosmin (70) : **LELEŞTI** (GORJ) Ş. g. cl. V Brădescu Felicia (50). Mărgulescu Cătălin (69). Mărgulescu Ioneta (60). Vlădoiu Corina (50), cl. VII Bufu Ioana (167), Fleancu Silvia (64). Nistor Daniela Nicoleta (22), Popescu Pantelimon (20) ; **LICURICI** (TELEORMAN) Ş. g. cl. VIII Dan Rodica Nonă (44). Iordan Nouraş (32), Iordan Zenu S. Romică (115). Stancu Georgeta (13) ; **LIEŞTI** (GALAŢI) Ş. g. 1 cl. VII Panaite Cristina (100). Stan Daniela (190) ; **LIPOVA** (ARAD) Ş. g. Radna cl. VI Calapiş Florin Anton (45), Forţ Adrian (46), Maxim Andreia (94). Munteanu Ramona (32) ; **LUCERNA** (ARAD) Ş. g. cl. VIII Hincu Cezar (248) ; **LUCIENI** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. cl. VI Stan Felix Dan (60) ; **LUDEŞTI** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. Schiriu cl VI Joiţa Silviu (60) ; **LUDUŞ** (MUREŞ) Ş. g. 2 cl. V Moldovan Radu Vasile (90). cl. VI Bacea Marian (111). Bica Corina Otilia (100). Nagy Csilla (85). Someriu Liliana (108), cl. VI Damian Letiţia Olga (180). Ilea Petru-Ioan (80) ; **LUGOJ** (TIMIŞ) Ş. g. 3 cl. V Drăgan Liviu (101), cl. VII Iacobici Silvia (149), Lepcan Mihaela (80). Pai Andreea (41). Popescu Elena (13), Popescu Emanuela (153). Popescu Mariana (100), Sîrbu Daniela (165), Streian Ovidiu (91), Vălceanu Adina (73) ; Ş. g. 4 cl. VIII Doboşan Felix (110) ; Ş. g. 6 cl. VI Alexandrescu Cosmin (56) ; **LUNCA** (BOTOŞANI) Ş. g. 1 cl. VII Birsan Cristinel (52), Birsan Violeta (45), Croitoru Rodica (68) ; **LUPENI** (HUNEDOARA) Ş. g. 2 cl. V Albieru Nicoleta Dalia (340), Bălăşoiu Mihaelă (360). Beza Petru (168), Bruşuiski Carmen (70), Bulai Narcisa (169), Ciobanu Adriana (50), Ciorîia Alina Monica (400) ; Cunea Daniela (160), Făgaş Ionel Adrian (250), Granwald Claudiu (282), Holda Ramona Gabriela (160), Kolesar Zoltan (91), Manărăzan Mihaela (84), Mărăscu Florin (169), Mărginean Elena Luminiţa (240), Miclăuş Daniela (56), Mihaly Valentin Cristian (355), Szamari Haynal (240), Szekeli Simona (160), Szan Gheorghe (60), Sucui Gabriela (55), Tritan Mirela (60), cl. VIII Alexa Ioan (150) ; Ş. g. 3 cl. VII Borungel Călălin (150), Marcus Marius (131).

MANGALIA (CONSTANŢA), fără menţiune de şcoală : cl. VIII Iluşca Cotina (45) ; **MARGINEA** (SUCEAVA) Ş. g. 1 cl. VII : Malos Lăcrămioara (99) ; **MATCA** (GALAŢI) Ş. g. 1 cl. VI Buzenche Petrina (110) ; **MĂRUNŢEI** (OLT) Ş. g. cl. VII Constantinescu Daniela (98) ; **MĂSTĂCANI** (GALAŢI) Ş. g. 1 cl. V Grigoraş Daniela (40) ; **MĂURENI** (CARAŞ-SEVERIN) Ş. g. cl. V Blaj Monica (54). Bordea Călina (42) ; Puşcaş Aurora (44), Sucală Simona (35), cl. VI Mengai Elfriede (56), Niederkarn Savine Charlotte (99), Petruţ Liliana (88). Peţan Dana (48), Rothas Malvine (63), Ruş Viorica (120), Sucală Emilia (110) ; **MEDIAŞ** (SIBIU) Ş. g. 2 cl. II Plopeanu Doru (50) ; **MEHADIA** (CARAŞ-SEVERIN) Ş. g. cl. V Lalescu Maria (69) ; **MEREŞTI** (CONSTANŢA) Ş. g. cl. VI Ganea Florica (123), Tîrnăcop Luminiţa (67) ; **MOINEŞTI** (BACĂU) Ş. g. 1 cl. V Căminschi Cristina (60), Ghineţ Marta (81), Hîru Ioan Florin (48), Vespan Marina (77), cl. VI Condrea Laura (90), Moţei Florin (119), cl. VII Andrei Simona (120), Hereş Ovidiu Daniel (120), cl. VIII Macsim Dorin Alexandru (99) ; **MORENI** (DÎMBOVIŢA) Ş. g. 1 cl. VII Guţu Florentina (111).. Ion Cristina (115), Ion Emilia (115), Iordache Roberi (81), Irimia Victor (150). Mărginean Graţiela (130), Popa Diana (90) ; fără menţiune de clasă : Lupea Ioana (50) ; Ş. g. 4 cl. V Dinică Elena Daciana (164), Drăgan Mădălina (41), Duţu Raiuca (100), Ionescu Cristina (100), Marinescu Marian (50), Mihăescu Camelia (58), Oprescu Cristina (100), Răduţă Gabriela (100), Stoicescu Ileana (160), cl. VI Bădeanu Răzvan (105), Ghiţă Florentina (84), Glăvan Gheorghe (107), Lupică Marius (308), cl. VII Cenuşe Adrian (400), Enăchescu Anca (118), cl. VIII Tulus Elena (96) ;

MOTRU (GORJ) Ş. g. 1 cl. IV Murgulescu Ariadna (66), cl. V Ciortan Nicoliţa (100), Frănculeseu Loredana (95), Lupulescu Adriana (60), 01. VI Ciurea Emanuela (70), Deriuş Sorin (52), Dumitrescu Alin (45) ; fără menţiune de clasă : Almării Lucian (80) ; Ş. g. 2 cl. VI Luţă Florian (50) ; **MOVILENI** (GALAŢI) Ş. g. 1 cl. V Ghiran Daniela (100), cl. VI Rădăcină Ionel. (88) ; fără menţiune de clasă : Artimon Mihaela (101) ; **MURGENI** (VASLUI) Ş. g. cl. V Ursu Florentina (70) ;

OCNA MUREŞ (ALBA) Ş. g. 1 cl. VIII Dănilă Ioana (263) : **OLANU** (VÎLCEA) Ş. g. cl. VII Ivaşcu Ady Lucian (860) : **OLTENIŢA** (ILFOV) Ş. g. 1 cl. VI Georgescu Valentin (130) ; **ORADEA** (BIHOR) Ş. g. 3 cl. VI Joia Florin Dinu (145) ; Ş. g. 9 cl. V Şerban Adriana (90) ; Ş. g. 14 cl. VII Sidea Doru (236) ; fără menţionare de clasă : Mihancea Dana (100) ; Ş. g. 16 cl. VIII Tripe Vidican Călin (24) ; Ş. g. 18 cl. III Dicu Petre (98) ; Ş. g. 20 cl. VI Bălan Andrei (60), Norgaş Cristian (90), cl. VII Ciortin Claudia (79) ; fără menţionare de clasă : Schmidt Irma (95) ; Lic. ped. „Iosif Vulcan" cl. VI Cioară Mihaela (44), cl. VIII Buştea Cristian (124) ; fără menţionare de şcoală cl. VI Filip Minodora (56) ; fără menţionare de clasă : Mahără Cosmina (88) ; **ORLEŞTI** (VÎLCEA) Ş. g. cl. VI Cotîrgă Dorina (103), Stancu Mariana (101) **ORŞOVA** (MEHEDINŢI) Ş. g. cl. V Ionescu Otilia (60), Truşcă Marina (47), Zoican Petrişor (34), Chiser Valentin (50), Constantin Loredana (50), Gavrilescu Carmen (100), cl. VII Budică Claudiana (7), Digulescu Marius (10), Galyaş Monica (80), Ionescu Laurenţiu (34), Iovanovici Misa Silvia (24), Puşcaş Simona (40). cl. VIII Grigore Dan (46) ; fără clasă : Meca Mihaela (67), Cerna Ana Maria (40) ; **OSICA DE SUS** (OLT) cl. IV Ţutelcă Roxana (100), cl. VI Opriţescu Claudia (230) ; **OŢELU**

Scanned with OKEN Scanner

Diaconu
Dinu
1983

ISSN 0016-5441

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

4

DIN CUPRINS:

— CÎTEVA APLICAȚII ALE TEOREMEI LUI CHAUCHY
— ASUPRA UNEI PROBLEME DE CONCURS
— UN MOD DE A DEDUCE UNELE IDENTITĂȚI TRIGONOMETRICE
— SOLUȚII ALE UNOR PROBLEME DATE LA ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR ȘI ÎN TABĂRA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
— PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU ȘI LICEU
— PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR, GIMNAZIU, PRELIMINARE DE TIP O.I.M. PENTRU GIMNAZIU, PENTRU LICEU, O.I.M., CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR ȘI INFORMATICĂ
— RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Acest număr a fost realizat în colaborare cu Filiala S.S.M. Vîlcea

ANUL XCII nr. 4/1987

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

1. Câteva aplicaţii ale teoremei lui *Cauchy*, de *Laurenţiu Panaitopol* 129
2. Asupra unei probleme de concurs, de *Nicolae Panelescu* 131
3. Un mod de a deduce unele identităţi trigonometrice, de *N. Păun* 132
4. Soluţiile problemelor date la admiterea în facultăţile de matematică, sesiunea iunie 1986, pentru elevii din lotul olimpic, de *D. M. Bătineţu-Giurgiu, D. Gheorghiu, D. Grigorescu* şi *V. Tudose* 134
5. Problemele date la testul din tabăra naţională de matematică, Craiova, ianuarie 1987, de *Ioan Tomescu* 142
6. Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E : 8821, E : 8827, E : 8828, E : 8830, E : 8836, E : 8841) 144
7. Probleme rezolvate pentru liceu (20733, 20650, 20743, 20753) 146
8. Probleme pentru ciclul primar (25—32) 148
9. Probleme pentru gimnaziu (E : 9107—E : 9130) 150
10. Probleme preliminare de tip O.I.M. pentru elevii din gimnaziu (O.G. 45—O.G.46) 153
11. Probleme pentru liceu (21065—21092) 153
12. Probleme pregătitoare pentru O.I.M. şi O.B.M. (O : 509—O.511) 158
13. Probleme pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C :681—C :688) 158
14. Probleme de informatică (I :317—I :318) 160
15. Rubrica rezolvitorilor de probleme 160

ANUL XCII 4 1987

COMITETUL DE REDACŢIE

Lector univ. Dumitru Acu, Sibiu; lector univ. Toma Albu; lector univ. Hora Banea, Braşov; lector univ. Octavian Băscă; conf. univ. Dan Brânzei, Iaşi; prof. Constantin Cărbunaru; prof. Marcel Chiriţă; prof. Pal Dalyay, Tg. Mureş; lector univ. Inocenţiu Drăghicescu; prof. Ioana Drăghici; inv. Alexandrina Dumitru; prof. Ilie Gheorghiă; prof. Adrian Ghiţoiu, Sinaia; cercetător principal Gheorghe Gussi; lector univ. Stere Ianuş; prof. Ştefan Kadar, Baia Mare; lector univ. Constantin Niţă; prof. univ. Arpad Pal, Cluj-Napoca; lector univ. Laurenţiu Panaitopol; prof. Olimpia Popescu, Ploieşti; matemat. Paul Radovici-Mărculescu; lector univ. Gheorghe Sireţeli; lector univ. Ioan Tomescu; prof. Florin Vulpescu-Jalea.

REDACŢIA GAZETEI MATEMATICE

Redactor şef (delegat): Acad. N. Teodorescu; redactori principali: prof. Ilie Ilieşeu, prof. Liviu Pârşan, prof. Marcel Ţena; redactori principali onorifici: C. Ionescu-Ţiu, asist. univ. Eliferie Rogai; redactori: prof. Liliana Balaci, prof. Alexandru Constantinescu.

Responsabil de număr: Prof. Marcel Ţena

ADRESA REDACŢIEI GAZETEI MATEMATICE

Str. Academiei nr. 14, tel. 14.46.53 — Bucureşti, 1, cod 79543.

Cititorii din străinătate se pot abona prin ROMPRESFILATELIA, Sectorul Export-Import-Presă, Calea Griviţei nr. 64—66, P. O. Box 12—201, Telex 10376 Prsfir Bucureşti ROMÂNIA.

Scanned with OKEN Scanner

GAZETA MATEMATICA

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul XCII nr. 4 Aprilie 1987

CÎTEVA APLICAȚII ALE TEOREMEI LUI CAUCHY

de Laurențiu Panaitopol

Propoziția 1. *Fie I un interval și funcțiile $f: I \to \mathbf{R}$, $g: I \to \mathbf{R}$ derivabile și $g'(x) \neq 0$, $(\forall) x \in I$. Dacă în plus funcția $h: I \to \mathbf{R}$, $h = \frac{f'}{g'}$ este injectivă, atunci din $f(a) + f(b) = f(c) + f(d)$ și $g(a) + g(b) = g(c) + g(d)$, cu $a, b, c, d \in I$, rezultă $a = c$ și $b = d$ sau $a = d$ și $b = c$.*

Demonstrație. Fără a micșora generalitatea putem presupune $a \leqslant b$ și $c \leqslant d$ și $g'(x) > 0$, $(\forall) x \in I$. Dacă $a = c$ rezultă $g(b) = g(d)$ și din injectivitatea lui g rezultă $b = d$. Analog, pentru $b = d$ rezultă $a = c$. Tot fără micșorarea generalității presupunem $a < c$ deci $g(a) < g(c)$ și deci $g(b) > g(d)$, adică $b > d$. Avem deci ordinea $a < c \leqslant d < b$.

Din relațiile din enunț rezultă $\frac{f(a) - f(c)}{g(a) - g(c)} = \frac{f(d) - f(b)}{g(d) - g(b)}$.

Aplicînd funcțiilor f și g teorema lui *Cauchy* pe intervalele $[a, c]$ și $[d, b]$ rezultă că există α și β, $a < \alpha < c$, $d < \beta < b$ (deci $\alpha < \beta$), astfel încît $\frac{f(a) - f(c)}{g(a) - g(c)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = h(\alpha)$ și $\frac{f(d) - f(b)}{g(d) - g(b)} = \frac{f'(\beta)}{g'(\beta)} = h(\beta)$.

De aici rezultă $h(\alpha) = h(\beta)$ și cum h este injectivă avem $\alpha = \beta$, ceea ce contrazice inegalitatea $\alpha < \beta$. Așadar $a = c$ și $b = d$.

Presupunînd inițial $a \leqslant b$ și $d \leqslant c$ va rezulta $a = d$ și $b = c$.

Aplicația 1. *Dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}_+^*$ și $m, n \in \mathbf{R}^*$, $m \neq n$ din $a^m + b^m = c^m + d^m$ și $a^n + b^n = c^n + d^n$, rezultă $a = c$ și $b = d$ sau $a = d$ și $b = c$.*

Soluție. Se consideră funcțiile $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^m$, $g(x) = x^n$. Avem $g'(x) = nx^{n-1}$ deci g' păstrează semn constant, iar $h(x) = \frac{m}{n} x^{m-n}$ este strict monotonă, deci injectivă. Condițiile propoziției fiind verificate, rezultatul este justificat.

Consecință imediată a propoziției 1 este:

Propoziția 2. *Dacă funcțiile $f: I \to \mathbf{R}$, $g: I \to \mathbf{R}$ verifică condițiile din propoziția 1, atunci pentru orice $k \in \mathbf{R}$ și orice $h \in \mathbf{R}$ sistemul*

$$\begin{cases} f(x) + f(y) = k \\ g(x) + g(y) = h \\ x \leqslant y \end{cases}$$

are cel mult o soluție pentru $x, y \in I$.

Scanned with OKEN Scanner

Prezentăm în continuare aplicații ale acestei propoziții.

Aplicația 2. *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{13\pi^2}{72} \\ \sin x + \sin y = \dfrac{\sqrt{6}}{2}. \end{cases}$$

Soluție. Din prima ecuație rezultă $x^2 \leqslant \dfrac{13\pi^2}{72}$ și deci

$$|x| \leqslant \pi\sqrt{\frac{13}{72}} < \frac{\pi}{2} \text{ și analog } |y| < \frac{\pi}{2}.$$

Dacă $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ atunci $\sin x \leqslant 0$ și deci $\sin y \geqslant \dfrac{\sqrt{6}}{2} > 1$, contradicție. La fel se ajunge la contradicție pentru $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$. Așadar $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) = I$.

Punem $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ și avem $g'(x) = \cos x > 0$, $h(x) = \dfrac{2x}{\cos x}$, $h'(x) = \dfrac{2(\cos x + x\sin x)}{\cos^2 x} > 0$ și deci h este strict descrescătoare. Sistemul se mai scrie:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\dfrac{\pi}{12}\right)^2 + \left(\dfrac{5\pi}{12}\right)^2 \\ \sin x + \sin y = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

și cum $\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12} \in I$ rezultă $x = \dfrac{\pi}{12}, y = \dfrac{5\pi}{12}$. La această soluție se mai adaugă $x = \dfrac{5\pi}{12}, y = \dfrac{\pi}{12}$.

Aplicația 3. *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} 2^{x^2+y} + 2^{y^2+x} = 4. \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Soluție. Cum $y = 1 - x$ și $x = 1 - y$ sistemul se mai scrie

$$\begin{cases} 2^{x^2+1-x} + 2^{y^2+1-y} = 4. \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Punem $f(x) = 2^{x^2+1-x}$, $g(x) = x$, $I = \mathbf{R}$. Avem:

$$g'(x) = 1 > 0,\ h(x) = 2^{x^2+1-x} \cdot (2x - 1)\ln 2,$$

$$h'(x) = 2^{x^2+1-x}\ln 2[2 + (2x - 1)^2 \ln 2] \text{ și deci } h'(x) > 0.$$

Pentru $x \leqslant y$ avem soluția $x = 0$, $y = 1$. Așadar sistemul are soluțiile (0,1) și (1,0).

Scanned with OKEN Scanner

ASUPRA UNEI PROBLEME DE CONCURS

de Nicolae Pavelescu, profesor, Rm. Vîlcea

La Concursul de matematică din anul 1985, etapa pe județ, la clasa a XII-a a fost propusă următoarea problemă:

Fie A un inel astfel încît $1 + 1 = 0$ și pentru orice $x \in A$, $x^2 = 0$ sau $x^2 = 1$.

1° *Să se arate că inelul A este comutativ;*

2° *Să se dea un exemplu de inel cu patru elemente avînd proprietățile de mai sus.*

În cele ce urmează vom arăta că inelul A va fi comutativ și în cazul în care se renunță la ipoteza $1 + 1 = 0$.

În acest scop vom demonstra următoarea

Propoziție. *Fie A un inel și p, q, r propozițiile:*

$$p : (\forall)\, x \in A \Rightarrow x^2 = 0 \text{ sau } x^2 = 1;$$

$$q : (\forall)\, x, y \in A \Rightarrow (xy)^2 = x^2y^2;$$

$$r : A \text{ este comutativ.}$$

Are loc șirul de implicații:

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r.$$

Demonstrație: „$p \Rightarrow q$": Fie x, $y \in A$. Sînt posibile următoarele patru cazuri distincte:

(1) $(xy)^2 = 0 \wedge (x^2 = 0 \vee y^2 = 0)$;

(2) $(xy)^2 = 0 \wedge (x^2 = y^2 = 1)$;

(3) $(xy)^2 = 1 \wedge (x^2 = 0 \vee y^2 = 0)$;

(4) $(xy)^2 = 1 \wedge (x^2 = y^2 = 1)$.

Să arătăm că oricare din cazurile (2) sau (3) ne conduc la o contradicție.

În cazul (2) avem:

$$0 = (xy)^2 = xyxy \Rightarrow x \cdot 0 \cdot y = x^2yxy^2 \Rightarrow 0 = yx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot 0 \cdot x = y^2x^2 \Rightarrow 0 = 1, \text{ contradicție.}$$

În cazul (3) avem, dacă de exemplu presupunem $x^2 = 0$:

$$(xy)^2 = 1 \Rightarrow xyxy = 1 \Rightarrow x^2yxy = x \cdot 1 \Rightarrow 0 = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = 0 \Rightarrow (xy)^2 = 0, \text{ contradicție.}$$

Analog pentru $y^2 = 0$.

Deci cazurile (2), (3) nu pot avea loc, iar în oricare din cazurile (1) sau (4) se verifică imediat că $(xy)^2 = x^2y^2$.

„$q \Rightarrow r$": Considerăm funcțiile $h_k : A \times A \to A$, $k \in \{1, 2, 3\}$ definite prin:

$$h_1(x, y) = (xy)^2 - x^2y^2,$$

$$h_2(x, y) = h_1(x + 1, y) - h_1(x, y),$$

$$h_3(x, y) = h_2(x, y + 1) - h_2(x, y).$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform ipotezei avem $h_1(x, y) = 0$ și atunci $h_2(x, y) = 0$, iar de aici $h_3(x,y) = 0$. Așadar $(\forall)\ x, y \in A \Rightarrow h_k(x, y) = 0$ pentru $k \in \{1, 2, 3\}$. Pentru $x, y \in A$ avem:

$$0 = h_2(x, y) = ((x+1)y)^2 - (x+1)^2y^2 = (xy + y)^2 - (x^2 + 2x + 1)y^2 =$$

$$= (xy)^2 + xy^2 + yxy + y^2 - x^2y^2 - 2xy^2 - y^2 =$$

$$= h_1(x, y) + yxy + (xy^2 - 2xy^2) + (y^2 - y^2) = yxy - xy^2;$$

$$0 = h_3(x, y) = h_2(x, y+1) - h_2(x, y) = (y+1)x(y+1) - x(y+1)^2 -$$

$$- h_2(x, y) = (yx + x)(y+1) - x(y^2 + 2y + 1) - h_2(x, y) =$$

$$= yxy + yx + xy + x - xy^2 - 2xy - x - h_2(x, y) =$$

$$= h_2(x, y) + (yx + xy - 2xy) + (x - x) - h_2(x, y) = yx - xy.$$

Rezultă deci că $xy = yx$, $(\forall)x, y \in A$, adică inelul este comutativ.

UN MOD DE A DEDUCE UNELE IDENTITĂȚI TRIGONOMETRICE

de Nicolae Păun, profesor, Rm. Vilcea

Fie ABC un triunghi oarecare. Plecînd de la acest triunghi vom forma șirul de triunghiuri $(A_nB_nC_n)_{n\geq 1}$ în felul următor: $A_1B_1C_1$ este triunghiul format de bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC (A_1 este intersecția bisectoarelor exterioare din B și C și analoagele), $A_2B_2C_2$ este triunghiul format de bisectoarele exterioare ale triunghiului $A_1B_1C_1$ și în general, $A_nB_nC_n$ este triunghiul format de bisectoarele exterioare ale triunghiului $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$, pentru orice $n \geq 2$. Următoarea propoziție ne dă măsurile A_n, B_n, C_n ale unghiurilor triunghiului $A_nB_nC_n$ în funcție de măsurile A, B, C ale unghiurilor triunghiului ABC.

Propoziția 1. *Pentru orice $n \geq 1$ avem egalitatea*

$$A_n = \frac{(-1)^n A + \frac{2^n - (-1)^n}{3}\pi}{2^n}$$

și analoagele pentru B_n și C_n.

Demonstrație. Procedăm prin inducție după n. Pentru $n = 1$, notînd cu I punctul de intersecție a bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC, se obține ușor $\widehat{BIC} = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ și atunci din patrulaterul inscriptibil $BICA_1$ rezultă $A_1 = \pi - \widehat{BIC} = \frac{\pi - A}{2}$, (1). Egalitatea (1) este exact cea din enunțul propoziției, pentru $n = 1$.

Să presupunem acum egalitatea din enunț adevărată pentru n și să o demonstrăm pentru $n+1$. Repetînd raționamentul anterior, găsim o egalitate similară lui (1), adică $A_{n+1} = \frac{\pi - A_n}{2}$. Înlocuind pe A_n și

Scanned with OKEN Scanner

efectuînd calculele se găsește că identitatea din enunț are loc și pentru $n+1$ și astfel propoziția este demonstrată.

De aici obținem imediat:

Propoziția 2. *Cu notațiile anterioare, există k_n întreg impar, astfel încît*

$$A = (-2)^n A_n + k_n\pi,\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

și analoagele pentru B și C.

Demonstrație: Din egalitatea dată de propoziția 1, exprimînd pe A în funcție de A_n obținem $A = (-2)^n A_n + \frac{1-(-2)^n}{3}\pi$. Notăm $k_n = \frac{1-(-2)^n}{3}$ și observăm că $1-(-2)^n = 1-(1-3)^n = 1-(1+\mathcal{M}3) = \mathcal{M}3$ deci k_n este întreg; cum $1-(-2)^n$ este impar, vom avea că și k_n este impar. Așadar $A = (-2)^n A_n + k_n\pi$, cu k_n întreg impar și propoziția este demonstrată.

Folosind acum anumite identități trigonometrice valabile în triunghiul ABC și înlocuind pe A, B, C cu expresiile date de propoziția 2, obținem identități corespunzătoare în triunghiul $A_nB_nC_n$.

Identitățile obținute în triunghiul $A_nB_nC_n$ nu sînt valabile doar în acest triunghi construit oarecum într-un mod particular (cum poate ar părea la prima vedere), ci sînt valabile în orice triunghi.

Pentru aceasta trebuie observat că pentru orice triunghi XYZ, există un triunghi ABC cu proprietatea că triunghiul $A_nB_nC_n$ din șirul construit anterior este tocmai XYZ.

Într-adevăr, în șirul de triunghiuri $(A_nB_nC_n)_{n\geqslant 1}$ am văzut cum se obține triunghiul $A_nB_nC_n$ din triunghiul $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Să observăm însă că putem obține și invers, triunghiul $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ din triunghiul $A_nB_nC_n$, căci se constată ușor că $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ este tocmai triunghiul ortic al lui $A_nB_nC_n$, pentru orice $n \geqslant 2$, iar ABC este triunghiul ortic al lui $A_1B_1C_1$.

Dacă plecăm atunci de la un triunghi XYZ și construim triunghiul său ortic, apoi triunghiul ortic al acestuia ș.a.m.d., după n pași vom obține un triunghi ABC de la care plecînd apoi invers și construind șirul de triunghiuri menționat, vom avea $XYZ = A_nB_nC_n$.

Vom da în continuare următoarea:

Aplicație: *Să se demonstreze că în orice triunghi ABC are loc identitatea:*

$$\sum(\sin^2 2^n A + 2\sin 2^n B \sin 2^n C \cos 2^n A) = 0$$

pentru orice $n \geqslant 1$ natural.

Soluție: Mai întîi arătăm că într-un triunghi ABC are loc identitatea

$$\sum \sin^2 A = 2\sum \sin^n B \sin C \cos A, \qquad (1).$$

Într-adevăr, scriind că $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ și analoagele, prin adunarea acestor relații obținem $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab\cos C + 2ac\cos B + 2bc\cos A$ și dacă mai ținem seama și de egalitatea $a = 2R\sin A$ și celelalte analoage, rezultă (1).

Scanned with OKEN Scanner

Să fixăm un număr natural $n \geq 1$. În egalitatea (1) înlocuim pe A, B, C cu expresiile acestora date de propoziția 2 și ținem seama că $\sin^2[(-2)^n A_n + k_n\pi] = \sin^2 2^n A_n$, $\sin[(-2)^n B_n + k_n\pi] = -(-1)^n \sin 2^n B_n$, $\sin[(-2)^n C_n + k_n\pi] = -(-1)^n \sin 2^n C_n$, $\cos[(-2)^n A_n + k_n\pi] = -\cos 2^n A_n$. Obținem identitatea

$$\sum \sin^2 2^n A_n = -2\sum \sin 2^n B_n \sin 2^n C_n \cos 2^n A_n, \text{ adică}$$

$$\sum(\sin^2 2^n A_n + \sin 2^n B_n \sin 2^n C_n \cos 2^n A_n) = 0.$$

În sfîrșit, ținem seama de faptul remarcat înainte de această aplicație și anume că o identitate între unghiurile triunghiului $A_nB_nC_n$ este de fapt valabilă pentru unghiurile oricărui alt triunghi ABC. Putem scrie așadar:

$$\sum(\sin^2 2^n A + \sin 2^n B \sin 2^n C \cos 2^n A) = 0,$$

ceea ce încheie soluția. Facem observația că o asemenea identitate ar fi greu de probat cu alte mijloace, de exemplu chiar prin inducție.

În încheiere propunem cititorilor identitatea:

$$\operatorname{tg} 2^n A + \operatorname{tg} 2^n B + \operatorname{tg} 2^n C = \operatorname{tg} 2^n A \operatorname{tg} 2^n B \operatorname{tg} 2^n C$$

valabilă în orice triunghi ABC, pentru orice $n \geq 1$ natural.

SOLUȚIILE PROBLEMELOR DATE LA ADMITEREA ÎN FACULTĂȚILE DE MATEMATICĂ, SESIUNEA SPECIALĂ, IUNIE 1986, PENTRU ELEVII DIN LOTUL OLIMPIC LĂRGIT AL R. S. ROMÂNIA

prezentate de D. M. Bătinețu-Giurgiu, D. Gheorghiu, Daniel Grigorescu și Valentin Tudose

I. ENUNȚURI

A. Algebră

1. Să se determine parametrul real m așa încît funcția de gradul al doilea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = 5m^2x^2 - (5m + 1)x + 1$ să aibă semn constant pe intervalul $(-1,1)$.

2. Să se arate că $\sqrt{6}$ este număr real irațional.

3. Fie ecuația $z^3 - 3iz^2 - 4z + 2i = 0$ cu rădăcinile z_1, z_2, z_3. Să se construiască ecuația de gradul al treilea cu rădăcinile z_1^2, z_2^2, z_3^2 și să se rezolve ecuația inițială.

4. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_4 - x_5 + x_6 = 1 \\ x_5 - x_6 + x_7 = 1 \\ x_6 - x_7 + x_8 = 1 \\ x_7 - x_8 + x_9 = 1 \\ x_8 - x_9 + x_{10} = 1 \\ x_9 - x_{10} + x_1 = 1 \\ x_{10} - x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie $A = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ o matrice de ordinul doi cu elemente numere complexe.

a) Să se determine A^n cu $n \in \mathbf{Z}$;

b) Să se determine u, $v \in \mathbf{C}$ așa încît

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbf{N}^* - \{1\}.$$

B. Analiză matematică

1. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(x + \frac{ak}{n} \right) \right), \text{ unde } a, x \in \mathbf{R}.$$

2. Să se arate că $x^{1/x} < 1 + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$, $(\forall)\ x \in (1, e)$.

3. Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ și folosind acest rezultat să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2} \right).$$

4. Fie $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \arcsin \dfrac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Să se traseze graficele funcțiilor f și f'.

5. Dacă $f : [1, e] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - \ln\sqrt{x}$ să se calculeze lungimea graficului funcției f pe intervalul $[1, e]$.

C. Geometrie și trigonometrie

1. Dacă A și B sînt două puncte distincte în planul $\mathcal{P}$, să se determine locul geometric al punctului $M \in \mathcal{P}$ cu proprietatea că $m(\widehat{MCB}) = 2m(\widehat{MAB})$, unde $C \in (AB)$ este un punct fixat.

2. Se consideră triunghiul oarecare ABC și $D \in (AB)$. Să se construiască o dreaptă care trece prin D și împarte triunghiul în două porțiuni de arii egale.

3. Să considerăm familia de drepte din plan $d_m : x = \dfrac{2}{m} - \dfrac{y}{m^2}$ unde $m \in \mathbf{R}^*$. Cîte drepte ale familiei date trec printr-un punct dat al planului? Dacă patru drepte din familie determină pe axa Ox o diviziune armonică ce se poate spune despre punctele de intersecție ale acelorași drepte cu axa Oy?

4. Se consideră un tetraedru $[ABCD]$ și un punct $M \in \text{Int}\,[ABCD]$. Să se arate că există două puncte $P \in (AB)$ și $Q \in (CD)$ așa încît $M \in (PQ)$.

5. Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = a, \text{ unde } a \in \mathbf{R}.$$

II. SOLUȚII

A. Algebră

1. Deoarece $0 \in (-1,1)$ și $f(0) = 1 \in \mathbf{R}_+^*$ deducem că trebuie să-l determinăm pe $m \in \mathbf{R}$ așa încît $f(x) \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall) x \in (-1,1)$. Pentru $m = 0$ avem $f(x) = 1 - x$ și din $x \in (-1,1) \Rightarrow -x \in (-1,1) \Rightarrow 1 - x \in (0,2)$ ceea ce arată că și pentru $m = 0$ avem $f(x) \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)\ x \in (-1,1)$. În continuare vom considera $m \in \mathbf{R}^*$ adică funcția f este polinomială de gradul al doilea. Pentru ca $f(x) \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)\ x \in (-1,1)$ trebuie ca f să nu se anuleze pe intervalul $(-1,1)$. Aceasta înseamnă

Scanned with OKEN Scanner

în care înlocuim x prin $\frac{k}{n^2}$, $k=\overline{1,n}$ și deducem:

$$e^{k/(n^2+k)} < 1+\frac{k}{n^2} < e^{k/n^2},\ k=\overline{1,n} \Rightarrow e^{k/n(n+1)} < 1+\frac{k}{n^2} < e^{k/n^2},\ (\forall)k=\overline{1,n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{1/n(n+1)\cdot\sum_{k=1}^{n}k} < \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < e^{1/n^2\cdot\sum_{k=1}^{n}k} \Rightarrow e^{1/2} < x_n < e^{(n+1)/2n},\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$$

unde $x_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$. Prin trecere la limită în ultima inegalitate deducem $\sqrt{e}\leqslant\lim_{n\to\infty}x_n\leqslant\sqrt{e}$ de unde rezultă că limita din enunț este $\sqrt{e}$.

Soluția a II-a. Folosim 2.1.6 din Culegerea de probleme de Analiză Matematică de *D. M. Bătinețu* și colectiv, pe care o enunțăm:

Fie $f:(a,b)\subset\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$, $g:(a,b)\to\mathbf{R}_+$ așa încît $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Dacă $(u_{mn})_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ este un șir dublu cu $u_{mn}\in\mathbf{R}_+^*$, $(\forall)\ (m,n)\in\mathbf{N}^2$ și $\lim_{m,n\to\infty}u_{mn}=0$, adică $(\forall)\ \varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$, $(\exists)\ n_\varepsilon\in\mathbf{N}$ așa încît $(\forall)\ m,n\in\mathbf{N}$; $m,n>n_\varepsilon$ avem $|u_{mn}|<\varepsilon$ atunci dacă există $w=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g(u_{mn})$ există și $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(u_{mn})=w$.

Pentru cazul nostru folosim $f;g:\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$, $g(x)=x$. Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{x^{-1}}=\ln e=1.$$

Totodată avem că

$$\ln x_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right),\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*.$$

Fie $u_{kn}=\frac{k}{n^2}\xrightarrow{k,n\to\infty}0$. De asemenea avem $\sum_{k=1}^{n}g(u_{kn})=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}\to\frac{1}{2}$.

Rezultă deci că $\ln x_n=\sum_{k=1}^{n}f(u_{kn})\to\frac{1}{2}$ și atunci $x_n\to\sqrt{e}$. Cu aceasta problema este rezolvată.

4. Se verifică fără dificultate că $D=\mathbf{R}$. Se observă că intersecțiile cu axele de coordonate sînt $A(1,0)$ și $O(0,0)$. Avem $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\infty$ și deci avem asimptotele oblice la graficul G_f al lui f dreptele $y=\frac{\pi}{4}\cdot x-1$ la ramura spre ∞ și $y=-\frac{\pi}{4}\cdot x+1$ la ramura spre $-\infty$.

Avem:

$$f'(x)=\begin{cases}\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2+2}}+\dfrac{x}{x^2+1}, & x\in(-1,\infty)\\[2ex] \arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2+2}}-\dfrac{x}{x^2+1}, & x\in(-\infty,-1)\end{cases}$$

și $f'_d(-1)=-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$, $f'_s(-1)=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea :

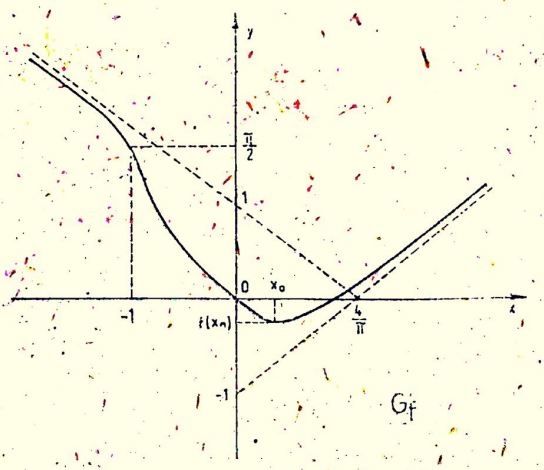
$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x^2+1)^2}, & x \in (-1, \infty) \\ -\dfrac{2}{(x^2+1)^2}, & x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

Din semnul lui f'' și observînd că $f'(0) = -\dfrac{\pi}{4}$ și $f'(1) = \dfrac{1}{2}$ deducem că există $x_0 \in (0, 1)$ așa încît $f'(x_0) = 0$. De asemenea avem $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\dfrac{\pi}{4}$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = \dfrac{\pi}{4}$ ceea ce arată că dreptele $y = -\dfrac{\pi}{4}$ și $y = \dfrac{\pi}{4}$ sînt asimptote orizontale la ramurile spre $-\infty$ respectiv spre $+\infty$ ale graficului G_f. Tablourile de variație pentru f și f' sînt :

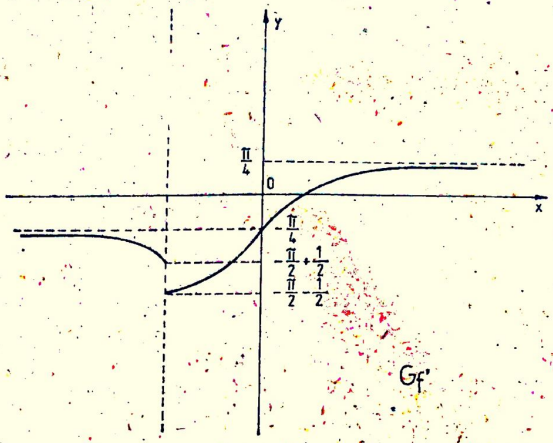
x	$-\infty$		-1		0		x_0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$\|$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$\|$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\cap$			$\cup$							

x	$-\infty$		-1		0		x_0		1		$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$\|$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$-$	$\frac{\pi}{2}$	$\|$	$\frac{1}{2}$	$-$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$
$f'''(x)$	$-$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\cap$			$\cup$							

unde am ținut seama că $f'''(x) = -\dfrac{8x}{(x^2+1)^3}$ pentru $x \in (-1, \infty)$ și $f'''(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^3}$ pentru $x \in (-\infty, -1)$.



Scanned with OKEN Scanner



5. Ştim că $l(f)=\int_1^e \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ şi atunci calculăm. $f'(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\Rightarrow 1+$

$+(f'(x))^2=\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2\Rightarrow\sqrt{1+(f'(x))^2}=\frac{x^2+1}{2x}\Rightarrow l(f)=\int_1^e\frac{x^2+1}{2x}\,dx=\frac{x^2}{4}\Big|_1^e+$

$+\frac{\ln x}{2}\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}$ unităţi de lungime.

C. Geometrie şi trigonometrie

1. Unghiul $\widehat{MCB}$ este unghi exterior al triunghiului MAC şi atunci $m(\widehat{MCB})=m(\widehat{MAC})+$ $+m(\widehat{AMC})=2m(\widehat{MAB})=2m(\widehat{MAC})$ de unde deducem că $m(\widehat{AMC})=m(\widehat{MAC})$ adică triunghiul CAM este isoscel cu $(CA)\equiv(CM)$. Deoarece AC este constantă (punctele A şi C sînt fixe) rezultă că M este constantă şi deci locul geometric căutat este cercul $\mathcal{C}(C, CA)-\{A\}$.

2. Demonstrăm mai intîi următoarea:

Lemă. *Dacă $ABCD$ este un trapez cu bazele $[AB]$, $[CD]$ şi O este intersecţia diagonalelor atunci $\sigma[OAD]=\sigma[OBC]$.*

Demonstraţie. Triunghiurile ACD şi BCD au ariile egale deoarece au aceeaşi bază $[CD]$ şi punctele A şi B se află pe o paralelă la baza $[CD]$. Avem: $\sigma[AOD]=\sigma[ADC]-\sigma[AOC]=$ $=\sigma[BCD]-\sigma[AOC]=\sigma[OBC]$ şi lema este demonstrată.

Să revenim la problema noastră. Fie M mijlocul laturii $[AB]$ a triunghiului. Dacă D coincide cu A atunci mediana din A are proprietatea din enunţ. La fel dacă D coincide cu B dreapta cerută este mediana din B iar dacă D coincide cu M atunci AM este dreapta cerută. Fie acum $D\in(AM)$, paralela dusă prin M la CD taie pe (BC) în E iar CM se intersectează cu DE în F. Deoarece (în conformitate cu lema) $\sigma[CEF]=\sigma[DFM]$ rezultă că DE este dreapta cerută. Dacă $D\in(MB)$ atunci paralela din M la CD taie pe (AC) în E şi MC se intersectează cu DE în F. Ca şi mai sus rezultă că DE este dreapta căutată.

3. Fie $P(x, y)\in\mathcal{P}$. $P\in d_m\Leftrightarrow xm^2-2m+y=0$ cu condiţia ca $\Delta'_m=1-xy\geqslant 0$. Avem de analizat mai multe cazuri:

i) Dacă $x\in\mathbf{R}^*$ şi $y=0$ atunci $m=x^{-1}$ şi deci prin punctul $P(x, 0)$ trece o singură dreaptă.

ii) Dacă $x=0$ şi $y\in\mathbf{R}^*$, atunci $m=\frac{y}{2}$ şi prin punctul $P(0, y)$ trece o singură dreaptă.

iii) Dacă $x, y\in\mathbf{R}^*$ şi $xy>1$ atunci prin punctul $P(x, y)$ nu trece nici o dreaptă.

Scanned with OKEN Scanner

iv) Dacă $xy = 1$ atunci $\Delta'_m = 0$ și deci $m_1 = m_2 = x^{-1}$ și deci prin punctul $P(x,y)$ trece o singură dreaptă.

v) Dacă $xy < 1 \Rightarrow \Delta'_m > 0$ atunci rezultă $m_1, m_2 \in \mathbb{R}^*$ cu $m_1 \neq m_2$ și deci prin punctul $P(x, y)$ trec două drepte distincte.

Fie d_{m_k}, $k = \overline{1,4}$ patru drepte care determină o diviziune armonică pe Ox. Notăm $M_k = d_{m_k} \cap Ox$ și $N_k = d_{m_k} \cap Oy$, $k = \overline{1,4}$. Punctele M_k au abscisele $\frac{2}{m_k}$ iar punctele N_k au ordonatele $2m_k$, $k = \overline{1,4}$. Dacă M_3, M_4 sînt conjugate armonic față de M_1, M_2 atunci avem:

$$\frac{M_3M_1}{M_3M_2} = \frac{M_4M_1}{M_4M_2}, \qquad (*).$$

Analitic relația (*) devine:

$$\frac{\left|\frac{2}{m_3} - \frac{2}{m_1}\right|}{\left|\frac{2}{m_3} - \frac{2}{m_2}\right|} = \frac{\left|\frac{2}{m_4} - \frac{2}{m_1}\right|}{\left|\frac{2}{m_4} - \frac{2}{m_2}\right|} \Leftrightarrow \left|\frac{m_1 - m_3}{m_2 - m_3} \cdot \frac{m_2}{m_1}\right| = \left|\frac{m_1 - m_4}{m_2 - m_4} \cdot \frac{m_2}{m_1}\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2}\right| = \left|\frac{m_4 - m_1}{m_4 - m_2}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{2m_3 - 2m_1}{2m_3 - 2m_2}\right| = \left|\frac{2m_4 - 2m_1}{2m_4 - 2m_2}\right| \Leftrightarrow \frac{N_3N_1}{N_3N_2} = \frac{N_4N_1}{N_4N_2},$$

adică punctele N_1, N_2, N_3, N_4 formează pe Oy o diviziune armonică.

4. Dreapta AM intersectează planul (BCD) în punctul O, interior triunghiului BCD. Deoarece $O \in$ în BCD rezultă că dreapta BO separă punctele C și D și deci $(\exists) Q \in (BC)$ așa încît punctele B, O, Q sînt coliniare. Punctele A, B, O, Q, M se află situate în același plan determinat de dreptele BA și AO. Dreapta QM separă punctele O și A și nu separă punctele O și B. Rezultă atunci că dreapta QM separă punctele A și B adică $(\exists)$ $P \in (AB)$ așa încît P, M, Q sînt coliniare și $M \in (PQ)$. Cu aceasta problema este rezolvată.

5. $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = a \Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) + 2\sin x \cos x = 2a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) + 1 + 2\sin x \cos x = 2a + 1 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x) - (2a+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^2 + 2\left(\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) - (2a+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + 4\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - (2a+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - (2a+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2} \pm 2\sqrt{a+1}}{2} \text{ cu } a + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant -1.$$

Mai departe ținem cont că funcția „cos" este mărginită și avem de rezolvat următoarele inecuații:

a) $-1 \leqslant \frac{-\sqrt{2} - 2\sqrt{a+1}}{2} \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 + \sqrt{2} \leqslant -2\sqrt{a+1} \leqslant 2 + \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} \geqslant$

$\geqslant 2\sqrt{a+1} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \geqslant 2a \Leftrightarrow a \leqslant \frac{1}{2} - \sqrt{2}$, adică această situație este verificată pentru

$a \in \left[-1, \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $-1 \leqslant \dfrac{-\sqrt{2}+2\sqrt{a+1}}{2} \leqslant 1 \Leftrightarrow -2+\sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{a+1} \leqslant 2+\sqrt{2} \Leftrightarrow 2a \leqslant 1+2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \leqslant \dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$, adică această situație este verificată pentru $a \in \left[-1, \dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\right]$.

În concluzie:

i) Dacă $a \in \left[-1, \dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\right]$ atunci soluția ecuației este

$$x-\frac{\pi}{4} \in (2\pi Z \pm \arccos a_1) \cup (2\pi Z \pm \arccos a_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(2\pi Z+\frac{\pi}{4} \pm \arccos a_1\right) \cup \left(2\pi Z+\frac{\pi}{4} \pm \arccos a_2\right),$$

unde

$$a_1=\frac{-\sqrt{2}-2\sqrt{a+1}}{2} \text{ și } a_2=\frac{-\sqrt{2}+2\sqrt{a+1}}{2}.$$

ii) Dacă $a \in \left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\right]$ atunci

$$x-\frac{\pi}{4} \in 2\pi Z \pm \arccos a_2 \Leftrightarrow x \in 2\pi Z+\frac{\pi}{4} \pm \arccos a_2.$$

iii) Dacă $a \notin \left[-1, \dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\right]$ atunci $x \in \emptyset$, adică ecuația este imposibilă.

PROBLEMELE DATE LA TESTUL DIN TABĂRA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ, CRAIOVA, 6—17 IANUARIE 1987

de lector dr. Ioan Tomescu, București

Cele patru probleme date la testul din 16 ianuarie au fost următoarele:

1. Să se arate că numărul $\displaystyle\sum_{1 \leqslant m < n < p \leqslant 1987} \frac{1}{mnp}$ nu este întreg.

2. Fie ABC un triunghi pentru care $AB \neq AC$. Să se arate că pe orice dreaptă care trece prin vîrful A al triunghiului există cel mult un punct M diferit de vîrfurile triunghiului, pentru care $\widehat{MBA} \equiv \widehat{MCA}$. Să se determine dreptele care trec prin A și care nu conțin nici un punct M cu proprietatea menționată.

3. Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sînt numere întregi mai mari sau egale cu 2 și distincte două cîte două, să se arate că are loc inegalitatea:

$$\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

4. Fie $(a_n)_{n>0}$ un șir de numere reale strict pozitive care este nemărginit și strict crescător astfel încît $a_{n+1} \leqslant 10\,a_n$ pentru orice $n \geqslant 0$. Să se demonstreze că pentru orice întreg $k \geqslant 1$ există o infinitate de perechi distincte de indici (p, q) astfel încît

$$10^k \leqslant \frac{a_p}{a_q} \leqslant 10^{k+1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prezentăm în continuare soluțiile acestor probleme.

1. Cea mai mare putere naturală a lui 5 mai mică sau egală cu 1987 este $625 = 5^4$. Mai obținem $2 \cdot 5^4 < 1987$, $3 \cdot 5^4 < 1987$ și $4 \cdot 5^4 > 1987$. Deci putem scrie

$$\sum_{1 \leqslant m < n < p \leqslant 1987} \frac{1}{mnp} = \frac{1}{6 \cdot 5^{12}} + \frac{a}{b \cdot 5^{11}},$$

unde $a, b \in \mathbf{N}^*$ și b nu este multiplu de 5. Dar numărul $\frac{1}{6 \cdot 5^{12}} + \frac{a}{b \cdot 5^{11}} = \frac{30a + b}{6b \cdot 5^{12}} \notin \mathbf{Z}$ deoarece numărătorul nu este multiplu de 5.

2. Vom nota dreapta variabilă care trece prin vîrful A cu AN. Distingem trei cazuri relative la poziția dreptei AN.

a) Dreapta AN conține unul din vîrfurile B și C. În acest caz nici un punct M de pe această dreaptă nu verifică condiția din problemă.

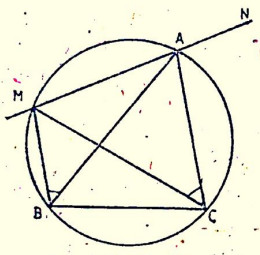


Fig. 1

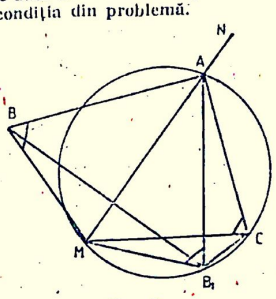


Fig. 2

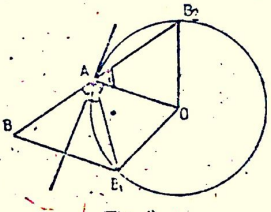


Fig. 3

b) Punctele B și C se găsesc într-un același semiplan relativ la dreapta AN. Rezultă că patrulaterul $MABC$ este inscriptibil (fig. 1). Deci punctul M este unul din punctele de intersecție (diferit de A) al dreptei AN cu cercul circumscris triunghiului ABC. Punctul M nu există atunci cînd dreapta AN este tangentă acestui cerc.

c) Punctele B și C se găsesc în semiplane diferite relativ la dreapta AN. Atunci punctul B_1, simetricul punctului B față de AN, se găsește în același semiplan cu punctul C, iar condiția $AB \neq AC$ implică $B_1 \neq C$. Punctul căutat M trebuie să îndeplinească condiția $\widehat{AB_1M} \equiv \widehat{ACM}$ și prin analogie cu cazul b), M este intersecția, diferită de A, dintre dreapta AN și cercul circumscris triunghiului AB_1C. (fig. 2). Punctul M nu există atunci cînd A, B_1 și C sînt coliniare, deci dreapta AN este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ și atunci cînd AN este tangentă cercului circumscris triunghiului AB_1C. În acest caz, din fig. 3 rezultă $AB = AB_1 = AB_2$, deci cercul AB_1C trece prin punctul B_2, simetricul lui B față de A.

Deci pe fiecare dreaptă AN există un punct M unic, în afara următoarelor cinci cazuri, cînd dreapta AN este: dreapta AB, AC, bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, tangentele în A la cercurile circumscrise triunghiurilor ABC, respectiv AB_2C. Se poate arăta că în ultimul caz dreapta AN este simediana din A a triunghiului ABC.

3. Fie $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Rezultă că $p_1 \geqslant 2$, $p_2 \geqslant 3, \ldots, p_n \geqslant n + 1$, deci

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right) \geqslant \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)} > \frac{1}{2}.$$

4. Fie $q = 0$ și p cel mai mic indice pentru care $\frac{a_p}{a_0} \geqslant 10^k$. Un astfel de indice va exista întotdeauna, deoarece $\lim_{p \to \infty} \frac{a_p}{a_0} = \infty$. Rezultă că $\frac{a_{p-1}}{a_0} < 10^k$ și deoarece $a_p \leqslant 10\, a_{p-1}$ obținem $a_p/a_0 \leqslant 10^{k+1}$. Se obțin o infinitate de perechi distincte (p, q) care verifică condiția din enunț luînd $q = 0, 1, 2, \ldots$.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

Problema E: 8821* (G.M.4/1986, pag. 131)

Fiecare cifră a unor numere naturale de trei cifre, scrise în baza zece, aparține mulțimii $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. *Aflați care din aceste numere sînt divizibile cu 55.*

Avia Albișoru Dinu, studentă, București

Soluție dată de *Horia-Apostol Pavel*, elev, cl. a VI-a Ș.g. 1 București. Numerele cerute în problemă fac parte din mulțimea numerelor de trei cifre care provin din înmulțirea lui 55 cu un număr par. Acești multipli sînt:

$$110 = 55 \times 2; \quad 220 = 55 \times 4; \quad 330 = 55 \times 6;$$
$$440 = 55 \times 8; \quad 550 = 55 \times 10; \quad 660 = 55 \times 12;$$
$$770 = 55 \times 14; \quad 880 = 55 \times 16; \quad 990 = 55 \times 18$$

Dintre acești nouă multipli numai numerele: 220, 440, 660 și 880 îndeplinesc condițiile problemei.

Soluție bună au mai dat: *Cătălin Vătășelu* și *Adrian Dumitrescu*, cl. a VI-a, Ș.g. Vălenii de Munte (jud. Prahova); *Lenuța Uzun*, cl. a VI-a, Ș. g. Dudești (jud. Brăila); *Anca-Elena Miron*, cl. a VI-a, Ș.g. Niculițel (jud. Tulcea).

Clasa a VI-a

Problema E: 8827* (G.M. 4/1986, pag. 132)

Fie D *și* E *simetricele vîrfurilor* B *și* C *ale triunghiului* ABC *față de mijloacele* M *și* N *ale laturilor* AC *și* AB. *Demonstrați că:*

1) *Punctele* D, A, E *sînt coliniare;*

2) $DE = 4MN$.

Florian Sacota, profesor, Sînmihaiu Almașului, Sălaj

Soluție. Din ipoteză avem congruențele:

$$AM \equiv MC, \ (1); \quad AN \equiv NB, \ (2); \quad BM \equiv MD, \ (3); \quad CN \equiv NE, \ (4).$$

a) Din (1) și (3) rezultă că $BADC$ este paralelogram, deci $AD \| BC$, (5).

Din (2) și (4) rezultă că $BCAE$ este paralelogram, deci $AE \| BC$, (6).

Din (5) și (6) deducem că E, A, D sînt coliniare (printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă).

b) Din paralelogramele $BADC$ și $BCAE$ avem $AD = BC$ și $AE = BC$, deci $DE = 2BC$, (7).

Din (1) și (2) rezultă că MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $BC = 2MN$. Înlocuind în (7) obținem $DE = 4MN$.

Soluție dată de *Constantinescu Maria—Cristina* și *Curuia Georgiana*, cl. a VII-a, Lic. ind. 7 Rm. Vîlcea: *Marin Nicoleta*, cl. a VII-a, Șc. gen. 31 Craiova; *Lungu Otilia*, cl. a VII-a, Șc. gen. 4 Făticeni.

Problema E: 8823* (G. M. 4/1986, pag. 132)

Găsiți cel mai mic număr care începe cu cifra 9 și care prin trecerea acestei cifre pe ultimul loc, numărul se micșorează de 4 ori.

Petre Ianiță, Tîrgești, Argeș

Soluție. Fie $\overline{9a_1 \ldots a_n}$ numărul cerut. Conform enunțului avem

$$\overline{a_1 \ldots a_n 9} \cdot 4 = \overline{9a_1 \ldots a_n}, \qquad (1)$$

Efectuînd înmulțirea în stînga, observăm că ultima cifră a produsului trebuie să fie 6; deci, $a_n = 6$. Relația (1) devine:

$$\overline{a_1 \ldots a_{n-1} 69} \cdot 4 = \overline{9a_1 \ldots a_{n-1}6}, \qquad (1')$$

Continuînd înmulțirea în stînga, observăm că ultimele două cifre ale produsului vor fi 76, deci $a_{n-1} = 7$. Relația (1') devine:

$$\overline{a_1 \ldots a_{n-2} 769} \cdot 4 = \overline{9a_1 \ldots a_{n-2} 76}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Continuînd raționamentul obținem $a_{n-2}=0$, $a_{n-3}=3$, $a_{n-4}=2$, $a_{n-5}=9$, adică tocmai prima cifră a produsului din dreapta relației (1). Deci numărul cerut este 923076.

Soluție dată de *Tudorașcu Eliza*, cl. a VI-a, Șc. gen. Făurești, jud. Vîlcea; *Petrie Anda-Laura*, cl. a VI-a, Șc. gen. 3 Dăbuleni, jud. Dolj; *Marinov Irina*, cl. a V-a, Șc. gen. 117 București; *Grosu Carmen Luiza*, cl. a VI-a, Șc. gen. 6 Vaslui.

Problema E: 8830* (G. M. 4/1986, pag. 132)

Să se determine cea mai mare fracție subunitară de forma

$$\frac{123+\overline{4xy}}{\overline{5yx}}.$$

Damian Marinescu, profesor, Tîrgoviște

Soluție. Pentru ca fracția să fie subunitară trebuie ca

$$123+\overline{4xy}<\overline{5yx}. \qquad (1)$$

Folosind scrierea în baza 10, relația (1) devine

$$123<\overline{5yx}-\overline{4xy}\Leftrightarrow 123<100+9y-9x\Leftrightarrow 23<9(y-x)$$

de unde $y-x>\frac{23}{9}$ adică $y-x\geqslant 3$, deci $x\in\{0,1,2,\ldots,6\}$ și $y\in\{3,4,5,\ldots,9\}$. Pentru a determina cea mai mare fracție trebuie să avem numitorul $\overline{5yx}$ cel mai mic, deci vom lua $y=3$ și $x=0$. Fracția va fi $\frac{123+403}{530}=\frac{526}{530}$.

Soluție dată de *Găitănaru Florin*, cl. a VI-a, Șc. gen. 4 Moreni; *Anghel Gabriela*, cl. a VI-a, Șc. gen. Lupeni, jud. Hunedoara; *Dumănescu Adriana*, cl. a VI-a, Șc. gen. 11 Buzău; *Dănciulă Eduard*, cl. a VI-a, Șc. gen. 169 București.

Clasa a VII-a

Problema E: 8836* (G. M. 4/1986, pag. 133)

Pe cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază R se iau punctele A, B, C astfel încît $m(\widehat{AOB})=36°$, $m(\widehat{BOC})=108°$. Să se arate că coarda BC este paralelă cu diametrul cercului ce trece prin A sau este împărțită de acesta într-un raport egal cu AB/R.

Laurențiu N. Gaiu, profesor, București

Soluție. Vom avea de analizat două cazuri, după cum punctele B și C vor fi de aceeași parte a diametrului ce trece prin A, sau de o parte și de alta a lui. Fie AA' diametrul ce trece prin A.

Cazul I. Punctele B și C sînt de aceeași parte a diametrului AA'. Triunghiul BOC este isoscel ($BO\equiv OC$ ca raze) cu $m(\widehat{BOC})=108°$ deci $m(\widehat{CBO})=36°=m(\widehat{AOB})$. Aceste unghiuri fiind alterne interne congruente rezultă că BC și AO sînt paralele, deci $BC\parallel AA'$.

Cazul II. Punctele B și C sînt de o parte și de alta față de diametrul AA'. Avem $m(\widehat{AOC})=m(\widehat{BOC})-m(\widehat{AOB})=72°$. Fie $AA'\cap BC=\{M\}$. Triunghiurile AMB și CMO vor fi asemenea deoarece $\widehat{AMB}\equiv\widehat{CMO}$ (opuse la vîrf) și $\widehat{COM}\equiv\widehat{BAM}$ pentru că $m(\widehat{COM})=72°$ și $m(\widehat{BAM})=72°$ (din triunghiul isoscel AOB). Vom scrie proporționalitatea laturilor $\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{CO}=\frac{AM}{MO}$ de unde $\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție dată de *Bratu Ștefănel* și *Ichim Daniela*, cl. a VII-a, Lic. ind. 7 Rm. Vîlcea; *Petrican Antigona*, cl. a VII-a, Șc. gen. 25 Galați; *Bordei Paul*, Șc. gen. 3 Rădăuți.

Clasa a VIII-a

Problema E: 8841* (G. M. 4/1986, pag. 134)

Un paralelipiped $ABCDA'B'C'D'$ are baza $ABCD$ un pătrat, iar N și M sînt picioarele perpendicularelor duse din vîrful A, respectiv D pe diagonala $D'B$. Să se demonstreze că $MDNB$ este paralelogram dacă și numai dacă $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

C. Hărăbor, profesor, București și
I. Diaconu, profesor, Piatra Neamț

Soluție. Presupunem că $MDNB$ este paralelogram. Din $DM \perp D'B$ și $B'N \| DM$ rezultă $B'N \perp BD'$. În triunghiul $BB'D'$ avem $B'B^2 = BD' \cdot BN$, iar în triunghiul ABD' avem $AB^2 = BD' \cdot BN$. Din aceste relații rezultă că $B'B = AB$ deci paralelipipedul este cub.

Presupunem că $ABCDA'B'C'D'$ este cub. Atunci distanțele de la vîrfurile A, C, B', D, A', C' la diagonala BD' sînt egale. Perpendicularele din punctele A, C și B' pe $D'B$ sînt concurente în N iar perpendicularele duse din punctele D, A' și C' pe $D'B$ sînt concurente în M. Rezultă că $DM \| NB'$ și $DM = NB'$, adică patrulaterul $MDNB$ este paralelogram.

Soluție dată de *Dabija Florentina*, cl. a IX-a, Lic. „B.P. Hașdeu" Buzău.

PROBLEME REZOLVATE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

Problema 20733* (G.M. 4/1986, pag. 135)

Fiind dat triunghiul ABC în care $\hat{C} < \min\{\hat{B}, \hat{A}\}$, iar $M \in (BC)$ și $N \in (AM)$ astfel încît $\widehat{MAB} \equiv \widehat{NBM} \equiv \widehat{ACB}$, să se arate că:

1. *Triunghiurile ABC și MNB sînt asemenea;*
2. *Cercurile circumscrise triunghiurilor ABN și ACM și cercul tangent în B la BN și tangent în C la AC au un punct comun $X \in \text{Int}(\widehat{MNB})$.*

Lelia Nicula, profesoară, București

Soluție. 1. Deoarece $\widehat{MAB} \equiv \widehat{NBM}$, rezultă $m(\widehat{BNM}) = m(\widehat{NBA}) + m(\widehat{NAB}) = m(\widehat{NBA}) + m(\widehat{NBM}) = m(\widehat{ABC})$. Triunghiurile ABC și MNB sînt asemenea deoarece au două perechi de unghiuri congruente.

2. Din ipoteză rezultă că cercul circumscris triunghiului ABN este tangent la BC iar cercul circumscris triunghiului ACM este tangent la AB. Fie E al doilea punct de intersecție a celor două cercuri. Deoarece patrulaterele $ANEB$ și $ACME$ sînt inscriptibile rezultă $\widehat{NBE} \equiv \widehat{NAE} \equiv \widehat{MCE}$, deci $\widehat{NBE} \equiv \widehat{BCE}$, adică cercul (EBC) este tangent la NB în B.

Analog $\widehat{EBC} \equiv \widehat{BAE} \equiv \widehat{ACE}$, deci cercul (EBC) este tangent la AC în C.

Clasa a X-a

Problema 20650* (G.M. 1/1986, pag. 23)

Fără a utiliza tabele de logaritmi să se arate că:

$$\log_3 7 \cdot \log_3 11 > \log_5^2 10.$$

Gh. Boja, profesor, Suhaia, Teleorman

Soluție. Inegalitatea din enunț se mai poate scrie:

$$\frac{\log_3 11}{\log_5 10} > \frac{\log_5 10}{\log_3 7}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom arăta că:

$$\frac{\log_5 11}{\log_5 10} > 1 \text{ și } \frac{\log_5 10}{\log_3 7} < 1.$$

Pentru a stabili prima inegalitate, avem:

$$\log_5 11 > \log_5 9 = 2 = \log_2 25 > \log_3 10,$$

iar pentru a stabili a doua inegalitate, avem succesiv:

$$\log_5 10 = 1 + \log_5 2 = 1 + \frac{1}{\log_2 5} < 1 + \frac{1}{\log_2 3} = 1 + \log_3 2 = \log_3 6 < \log_3 7.$$

Cu aceasta soluția se încheie.

Soluție dată de *Caprini Andreea*, cl. a IX-a, Lic. Ind. 34 București

Clasa a XI-a

Problema 20749* (G. M. 4/1986, pag. 137)

a) *Să se arate că curbele de ecuații respectiv:* $(C_1) \equiv x^2 - ax - y - b = 0$; $(C_2) \equiv xy - (a+1)y - b = 0$; $(C_3) \equiv x^2 - ax + y + b = 0$; $(C_4) \equiv xy - (a-1)y + b = 0$ *trec printr-un punct fix A ale cărui coordonate se cer;*

b) *Să se scrie ecuațiile tangentelor la cele patru curbe duse prin punctul lor comun A;*

c) *Să se reprezinte grafic cele patru curbe în cazul particular* $a = b = 1$.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. a) Se observă că cele patru ecuații au soluția comună $(a, -b)$, prin urmare punctul comun celor patru curbe este $A(a, -b)$.

b) Curbele fiind de gradul al doilea (conice), ecuația tangentei în punctul A la fiecare din aceste curbe, se scrie prin dedublare. Notînd cu (T_i) tangenta în A la curba (C_i), $i = 1, 2, 3, 4$, vom avea:

$$(T_1) \equiv ax - \frac{a}{2}(x+a) - \frac{1}{2}(y-b) - b = 0, \text{adică } (T_1) \equiv ax - y - a^2 - b = 0.$$

$$(T_2) \equiv \frac{-bx}{2} + \frac{ay}{2} - \frac{a+1}{2}(y-b) - b = 0, \text{ adică } (T_2) \equiv bx + y - ab + b = 0.$$

$$(T_3) \equiv ax - \frac{a}{2}(x+a) + \frac{1}{2}(y-b) + b = 0, \text{ adică } (T_3) \equiv ax + y - a^2 + b = 0.$$

$$(T_4) \equiv \frac{-bx}{2} + \frac{ay}{2} - \frac{a-1}{2}(y-b) + b = 0, \text{ adică } (T_4) \equiv bx - y - ab - b = 0.$$

c) Putem scrie ecuația curbei (C_1) sub forma $(C_1) \equiv y = x^2 - x - 1$, care reprezintă o parabolă cu vîrful $V_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$, axa de simetrie dreapta $x = \frac{1}{2}$ și avînd ramurile în sus.

Curba (C_2) se scrie sub forma echivalentă $(x-2)y = 1$ și reprezintă o hiperbolă echilateră cu centrul de simetrie în punctul $K_2(2,0)$ și avînd drept asimptote dreptele $y = 0$ și $x = 2$; ramurile hiperbolei sînt în cadranele I și III față de sistemul de axe dat de aceste asimptote.

Scanned with OKEN Scanner

Curba (C_a) se scrie $(C_a) \equiv y = x^2 - x + 1$ și reprezintă o parabolă cu vîrful $V_3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ și axa de simetrie dreapta $x = \frac{1}{2}$, ramurile parabolei fiind în sus.

Curba (C_4) se scrie echivalent $(C_4) \equiv xy = -1$ și reprezintă o hiperbolă echilateră cu centrul de simetrie în originea axelor de coordonate, avînd drept asimptote tocmai axele Ox și Oy; ramurile hiperbolei sînt în cadranele II și IV.

Clasa a XII-a

Problema 20753 (G. M.4/1986, pag. 138)

Să se găsească primitivele funcției $f : I \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^2}{(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x)(x^2 \cos x - 2x \sin x - 2\cos x)}$$

I fiind un interval, pe care numitorul nu se anulează.

Gh. Szöllösy, profesor, Sighetu Marmației

Soluție. Notăm:

$$g(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x;\ h(x) = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x.$$

Efectuînd calculele, obținem:

$$g'(x) = x^2 \cos x;\ h'(x) = -x^2 \sin x;$$

$$g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x) = x^4 - 2x^2.$$

Ținînd seama de acestea avem:

$$\int f(x)dx = \int \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{g(x) \cdot h(x)} dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx - \int \frac{h'(x)}{h(x)} dx =$$

$$= \ln \left| \frac{g(x)}{h(x)} \right| + C = \ln \left| \frac{x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x}{x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x} \right| + C.$$

Soluție bună a dat *Cezar Joița*, cl. a XII-a, Găiești.

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

25. La o demonstrație sportivă participă 320 copii, adică șoimi, pionieri și U.T.C.-iști. Se știe că numărul pionierilor este de 4 ori mai mare decît al șoimilor, iar numărul U.T.C.-iștilor este egal cu cel al pionierilor și al șoimilor la un loc. Să se afle cîți șoimi, pionieri și U.T.C.-iști au participat la demonstrație.

Ioana Gavrilă, învățătoare, Rm. Vîlcea

Scanned with OKEN Scanner

26. Un traseu în formă de cerc este parcurs în 24 de minute de un elev și în 8 minute de tatăl său. Dacă pleacă amîndoi în același timp în sensuri diferite, după cît timp se întîlnesc și a cîta parte din traseu parcurge fiecare?

Victoria Verzeanu, învățătoare, Rm. Vîlcea

27. Un grup de 96 oameni s-au deplasat la teatru cu trei autobuze și cîteva automobile. Știind că în fiecare autobuz au fost 27 oameni și în fiecare automobil 5 oameni, determinați numărul automobilelor.

* * *

28. Determinați numărul cel mai mare de duminici pe care îl poate conține un an calendaristic. Argumentați răspunsul.

* * *

29. Suma a două numere naturale este un număr prim, iar unul din aceste numere este de 30 ori mai mare decît celălalt. Să se afle cele două numere. (Prin număr prim se înțelege un număr care se împarte exact doar la 1 și la el însuși).

Maria Călina, învățătoare, Rm. Vîlcea

30. Înlocuiți steluțele cu cifre, astfel încît să avem egalități corecte:

a)
$$\begin{array}{r} 213+ \\ 8*4 \\ 28* \\ *46 \\ \hline *870 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 7**2- \\ *46* \\ \hline 2152 \end{array}$$

* * *

31. Verificați pe rînd egalitățile:

a) $9 \times 1 + 2 = 11$;

b) $9 \times 12 + 3 = 111$;

c) $9 \times 123 + 4 = 1111$;

d) $9 \times 1234 + 5 = 11111$;

e) $9 \times 12345 + 6 = 111111$;

f) $9 \times 9 + 7 = 88$;

g) $98 \times 9 + 6 = 888$;

h) $987 \times 9 + 5 = 8888$;

i) $9876 \times 9 + 4 = 88888$.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

32. Rezolvați ecuațiile :

a) $66 - x \cdot 5 = 31$;

b) $(y - 43) \cdot 3 = 21$;

c) $50 + z \cdot 10 = 300$;

d) $42 \cdot t - 84 = 42$.

* * *

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E : 9107. La împărțirea a două numere naturale diferența dintre deîmpărțit și rest este 3. Aflați numerele.

Ion Iustin Ghica, elev, Rm. Vîlcea

E : 9108*. Să se arate că dacă pătratul unui număr natural n are cifra zecilor impară, atunci cifra unităților lui n este 4 sau 6.

Florinda Pavelescu, elevă, Rm. Vîlcea

E : 9109. Se consideră mulțimile :

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ este divizor al lui 18$\}$ și

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x$ este divizor al lui 12$\}$.

Să se calculeze $A - B$ și $B - A$.

Mariana Băcănoiu, profesoară, Dăești, Vîlcea

E : 9110. Înlocuiți literele cu cifre astfel încît suma de mai jos să fie verificată :

$$\begin{array}{r} BALADA \\ LADA \\ ADA \\ DA \\ A \\ \hline 2\,5\,3\,5\,2\,5 \end{array}$$

Dragoș Constantinescu, profesor, Rm. Vîlcea

E : 9111*. Cei 30 elevi ai unei clase au obținut la o lucrare scrisă următoarele note : 12 elevi au obținut 10 sau 9, 20 elevi au obținut 9 sau 8, 15 elevi au obținut 8 sau 7 și 5 elevi au obținut 7 sau 6.

Să se afle media aritmetică a tuturor notelor obținute.

Marius Dinu, elev, Zătreni, Vîlcea

E : 9112*. Reconstituiți înmulțirea :

$$\begin{array}{r} 5{*}{*}4 \\ \times\ 5{*}{*}7 \\ \hline 40{*}{*}8 \\ 1{*}4{*}{*} \\ 17{*}{*}{*} \\ 2{*}{*}{*}0 \\ \hline {*}0{*}{*}5{*}18 \end{array}$$

(Kvant nr. 1/1984)

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a VI-a

E: 9113*. Să se arate că numărul $A = 5 + 5^3 + 5^5 + \ldots + 5^{47}$ se divide cu 120. Generalizare.

Maria Vasilescu, profesoară, Rm. Vilcea

E: 9114. Să se compare numerele $a = 3^{183}$ și $b = 2^{307} - 2^{306} - 2^{305}$.

Maria Băcănoiu, profesoară Dăești, Vilcea

E: 9115*. Fie O mijlocul unui segment AB. Pe perpendiculara în A pe AB se consideră un punct M astfel încît $AM \equiv OA$. Prelungim pe OM cu un segment $ON = \frac{1}{2} OM$ și fie E mijlocul segmentului MB. Să se arate că:

a) Triunghiul AEN este isoscel;

b) $OE = \frac{1}{4} AB$.

Adrian Tudorașcu și *Eliza Tudorașcu*, elevi, Făgăraș, Vilcea

E: 9116*. Folosind rigla și compasul să se împartă în trei părți congruente un unghi de măsură 108°.

I. Nicolaescu, profesor, Drăgășani, Vilcea

E: 9117. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA ale patrulaterului convex $ABCD$. Notînd $AC \cap BD = \{S\}$, să se arate că $\widehat{ASD} > 90°$ dacă și numai dacă $MP > NQ$.

Dragoș Constantinescu, profesor, Rm. Vilcea

E: 9118. Fie $ABCD$ un trapez isoscel în care AB este baza mare. Paralela prin D la BC taie AB în E și prelungim segmentul DE cu un segment EF astfel ca $BF \equiv BE$. Să se demonstreze că triunghiul ACF este isoscel.

Dumitru Verceanu, profesor, Rm. Vilcea

Clasa a VII-a

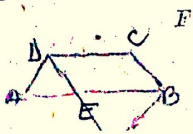
E: 9119*. Aflați numerele naturale pătrate perfecte de forma $4n^2 - 35$, $n \in \mathbb{N}$.

Elena Mihaela Ghica, elevă, Rm. Vilcea

E: 9120*. a) Să se determine polinomul $P(X)$ de gradul întîi știind că $P(-2) = -1$ și $P(2) = 3$;

b) Să se arate că numărul $P(0) + P(P(0)) + P(P(P(0))) + \ldots + \underbrace{P(P(\ldots(0)\ldots))}_{1985 \text{ paranteze}}$ este produsul a patru numere prime.

Florea Puican, profesor, Rm. Vilcea



Scanned with OKEN Scanner

E : 9121. Să se rezolve în numere întregi ecuația :

$$5xy + 3x + 7y + 1 = 0.$$

Gh. Moțoc, profesor, Sălătrucel, Vilcea

E : 9122. Un triunghi este echilateral dacă și numai dacă $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} = \frac{a + b + c}{3}$, a, b, c fiind lungimile laturilor triunghiului.

Ion Ghica, profesor, Rm. Vilcea

E : 9123*. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \| CD)$ în care $CD = k \cdot AB$, $k > 1$.

a) Să se arate că are loc relația

$$BC^2 + AD^2 + 2kAB^2 = AC^2 + BD^2;$$

b) Dacă în plus trapezul se poate circumscrie unui cerc atunci are loc și relația :

$$(k + 1)AB = BC + AD;$$

c) Dacă în plus trapezul are diagonalele perpendiculare, atunci

$$kAB^2 = BC \cdot AD, \quad (k + 1)\,AB = \sqrt{AC^2 + BD^2} \text{ și } AB \geqslant \frac{\sqrt{S}}{k + 1}$$

unde S este aria trapezului.

Nicolae Pavelescu, profesor, Rm. Vilcea

E : 9124. Considerăm în triunghiul ABC medianele AA', BB', CC'. Notînd $d_a = d(B; AA')$, $d_b = d(C, BB')$, $d_c = d(A, CC')$, să se arate că

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} < \frac{2}{r},$$

unde r este măsura razei cercului înscris în triunghi.

Dumitru Verzeanu, profesor, Rm. Vilcea

Clasa a VIII-a

E : 9125*. În laboratorul de biologie, care are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 8m, 8m și 4 m, au scăpat dintr-o cutie 33 fluturi vii, care s-au împrăștiat, zburînd, în toată sala, fără a ieși afară.

Să se arate că în orice moment există doi fluturi la o distanță mai mică de 3,50 m unul de altul.

Gh. Efrim, Brezoi

E : 9126. Fie A și B două puncte fixe dintr-un plan și $(AX$, $(BY$ două semidrepte paralele, de același sens, variabile. Să se găsească locul geometric al punctelor egal depărtate de segmentul AB și de cele două semidrepte.

Aurel Caramida, profesor, Roești, Vilcea

Scanned with OKEN Scanner

E: 9127*. Fie tetraedrul $SABC$ cu $SA \perp SB \perp SC \perp SA$, $BC = a$ cm, $SA = a\sqrt{15}/4$ cm, $m(\widehat{SBC}) = 75°$. Să se calculeze aria și volumul tetraedrului.

Florea Puican, profesor, Rm. Vîlcea

E: 9128. Lungimea l a ipotenuzei triunghiului dreptunghic isoscel ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ se exprimă printr-un număr natural. Pe perpendiculara în A pe planul triunghiului se consideră punctul P astfel încît distanța de la P la ipotenuză să fie $l\sqrt{2}/2$. Determinați măsura unghiului diedru format de planele (PBC) și (ABC).

Ion Ghica, profesor, Rm. Vîlcea

E: 9129. Găsiți toate pătratele perfecte de cel mult patru cifre care au cifra zecilor egală cu 1 sau cu 5.

Nicolae Pavelescu, profesor, Rm. Vîlcea

E: 9130*. Fie polinomul $P(X) = X^3 + X^2 + X + a^3 + b^3 + a^2 + b^2 + a + b + 2ab$, $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}$. Determinați perechile de numere a și b astfel încît $P(X)$ să fie divizibil cu $X + a + b$.

Elena Mihaela Ghica, elevă, Rm. Vîlcea

PROBLEME PRELIMINARE DE TIP OLM. PENTRU ELEVII DIN GIMNAZIU

O.G.: 45. Fie 101 numere întregi distincte astfel încît modulul oricărnia dintre ele este mai mic sau egal cu 99. Demonstrați că există trei dintre acestea pentru care suma lor este zero. Generalizare.

* * *

O.G.: 46. Fie numerele $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$ astfel încît $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$. Găsiți cea mai mare valoare pe care o poate lua suma $S = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5$.

* * *

PROBLEME PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

21065*. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că

$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)(x) + x, \quad (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

1°. Să se arate că f este injectivă;

2°. Să se calculeze $f(0)$;

3°. Arătați că există cel puțin o astfel de funcție.

Liviu Pîrșan

21066. Să se afle cel mai mare și cel mai mic număr natural de trei cifre $n = \overline{abc}$, știind că $2a + b = 18$ și că suma cifrelor numărului $1000 - n$ este 9.

L. Mănescu, profesor, Rm. Vîlcea

Scanned with OKEN Scanner

21067*. Un patrulater convex $ABCD$ are unghiurile opuse $\widehat{ABC}$ și $\widehat{ADC}$ drepte iar unghiul $\widehat{BAD}$ congruent cu unghiul $\widehat{ACB}$. Știind că diagonalele patrulaterului se taie în punctul E, formînd între ele unghiul $\widehat{BEC}$ de măsură 60°, să se afle $m(\widehat{BAD})$ și $m(\widehat{BCD})$. Notînd cu M mijlocul laturii $[AD]$, să se arate că $BM \parallel CD$.

L. Mănescu, profesor, Rm. Vîlcea

21068. Fie ecuația de gradul al doilea, $ax^2 - bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$. Să se determine coeficienții a, b, c astfel încît ecuația să admită drept rădăcini numerele a, b și drept discriminant pe c.

Constantin Schiteanu, Brezoi, Vîlcea

21069. Rezolvați în numere naturale sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} \\ a \cdot b \cdot c = d \\ a + b + c = d. \end{cases}$$

Mujurel Pancu, elev, Rm. Vîlcea

21070. În triunghiul oarecare ABC, fie A_1 și C_1 picioarele înălțimilor duse din A și C pe laturile $[BC]$ și $[AB]$, iar B' mijlocul laturii $[AC]$. Dacă $m(\widehat{A_1B'C_1}) = 90°$, să se construiască triunghiul, cunoscînd lungimea laturii $[BC]$ și a înălțimii $[AA_1]$.

Dumitru Verzeanu, profesor, Rm. Vîlcea

21071*. Numerele reale x, y, z strict pozitive satisfac relațiile

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25; \quad \frac{y^2}{3} + z^2 = 9; \quad z^2 + zx + x^2 = 16.$$

Se cere să se calculeze valoarea expresiei $xy + 2yz + 3zx$.

(Olimpiadă U.R.S.S., 1984)

Clasa a X-a

21072. Hexagonul convex $ABCDEF$ are unghiurile $\hat{D}$ și $\hat{F}$ congruente, fiecare avînd cîte 162°. Unghiurile $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{D}$ au măsurile lor în progresie geometrică, iar unghiurile $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{E}$ în progresie aritmetică, avînd drept rații numerele naturale q, respectiv r.

1°. Să se afle măsurile celorlalte unghiuri știind că toate aceste măsuri, exprimate în grade sînt numere naturale și că, în plus, $m(\hat{C})$ are în condițiile date, cea mai mică valoare posibilă;

2°. Care este măsura maximă ce o poate avea unghiul $\hat{C}$?

3°. Cîte clase de hexagoane de acest tip există, dacă ținem seama de valorile pe care le poate lua rația r? (Hexagoanele dintr-o aceeași clasă au unghiurile respectiv congruente).

Lucian Mănescu, profesor, Rm. Vîlcea

Scanned with OKEN Scanner

21073*. Să se demonstreze identitățile:

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^n = 4^n ;$$

$$C_{2n}^n + 2(C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \ldots + C_{2n}^{n-1}) = 4^n ;$$

$$(-1)C_{2n}^n + 2(C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \ldots + (-1)^{n-1}C_{2n}^{n-1}) = 0.$$

N. Păun, profesor, Rm. Vîlcea

21074*. Se dau numerele naturale $P(n) = n^4 + 6n^3 - 7n^2 - 36n + 36$ și $Q(n) = n^4 + 12n^3 + 41n^2 + 30n$, unde n este natural, $n \geqslant 3$. Dacă $d \in \mathbb{N}$ este c.m.m.d.c. al numerelor $P(n)$ și $Q(n)$, să se arate că $d \geqslant 54$.

Gh. Efrim, profesor, Brezoi, Vîlcea

21075. Dacă numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$ au același modul, atunci există relația:

$$(z_1 + \bar{z}_2)(z_2 + \bar{z}_3)\ldots(z_n + \bar{z}_1) = (z_1 + \bar{z}_n)(z + \bar{z}_{n-1})\ldots(z_2 + \bar{z}_1).$$

Virgil Nicula, profesor, București

21076*. Într-un semicerc de diametru $2R$ se înscrie un pătrat (adică pătratul are două vîrfuri pe diametrul semicercului, iar celelalte două pe semicerc). Pe semicerc se consideră un punct care determină cu capetele diametrului un triunghi de arie egală cu aria pătratului. Notînd cu r raza cercului înscris în acest triunghi, să se determine raportul $\frac{r}{R}$.

Ioan Todericiță, profesor, Galați

21077. Să se determine toate polinoamele $P \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea:

$$P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = 1, \ (\forall) x \in \mathbb{R}^*.$$

Marcelina Popa, profesoară, Tulcea

21078. Să se demonstreze identitatea:

$$2\arcsin\sqrt{x-1} - \arcsin(2x-3) = \pi/2, \ (\forall) x \in [1; 2].$$

Dumitru Văduva, profesor, Rm. Vîlcea

Clasa a XI-a

21079. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ și $S_i = a_1^i + a_2^i + \ldots + a_n^i$, $i = \overline{1,n}$. Să se calculeze determinantul matricei $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ unde $b_{ij} = S_i - a_j^i$; $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Nicolae Pavelescu, profesor, Rm. Vîlcea

21080*. Studiați convergența șirului $(x_n)_{n>0}$ definit prin recurența

$$x_{n+1} = x_n(e^{x_n} - 1), \ x_0 \in \mathbb{R}.$$

Constantin Drugan, profesor, Rm. Vîlcea

Scanned with OKEN Scanner

21081. Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + bx + c - y$ și mulțimea $P = \{M(x, y) \mid f(x,y) < 0\}$. Să se arate că mulțimea P este convexă.

Florian Pană, profesor, Călimănești, Vîlcea

21082. În triunghiul dreptunghic AFD, $m(\hat{D}) = 90°$ și $m(\hat{F}) = a$. În mijlocul B al ipotenuzei se construiește perpendiculara pe ipotenuză, dreaptă care întîlnește prelungirea catetei $[FD]$ în punctul C. Se cere:

1°. Să se arate că dacă segmentul $[CD]$ este mai mare decît cateta $[FD]$ atunci el este mai mare și decît segmentul $[AB]$;

2°. Să se demonstreze că în acest caz dreptele AC și BD se întîlnesc într-un punct M situat în semiplanul determinat de dreapta FD și care conține triunghiul dat;

3°. Dîndu-se $m(\widehat{CMD}) = 89°$, să se afle numeric $m(\hat{F}) = a$.

L. Mănescu, profesor, Rm. Vîlcea

21083*. Să se determine termenul general al șirului care satisface relația de recurență:

$$a_{n+1} = (n+1)a_n + n(n+1)a_{n-1}, (\forall)n \geqslant 2 \text{ și } a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2}.$$

Sorin Deaconu, elev, Rm. Vîlcea

21084. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln(n!)}{n(n+1)}\right)$.

Aurel Ene, profesor, Rm. Vîlcea

21085*. Într-un sistem de coordonate ortogonale xOy fie M un punct variabil pe dreapta $y = a$, unde $a > 0$ este fixat. Să se afle poziția lui M din primul cadran pentru care mediatoarea segmentului $[OM]$ taie axele de coordonate după un segment de lungime minimă.

Ion Gheorghiu, profesor, Rm. Vîlcea

Clasa a XII-a

21086*. Fie $(M, *)$ un monoid și e elementul său neutru.

a) Este posibil să existe $H \subset M$ așa încît $(H, *)$ să fie grup iar elementul neutru al lui H să fie diferit de e?

b) Notăm cu U mulțimea elementelor simetrizabile ale monoidului M. Este posibil să existe $H \subset M \setminus U$, $H \neq \emptyset$ astfel încît $(H, *)$ să fie grup?

c) Demonstrați că dacă $(H, *)$ este grup, $H \subset M$ și $H \cap U \neq \emptyset$ atunci elementul neutru al lui H este e.

Liliana Niculescu, profesoară, Craiova

Scanned with OKEN Scanner

21087. Se consideră matricea :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

și se definește funcția $f_A : E \to E (E = \mathbf{Z}^3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, cu $x_i \in \mathbf{Z})$, prin

$f_A(x) = Ax$, pentru orice x din E, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^n pentru $n \in \mathbf{N}^*$;

b) Să se demonstreze egalitatea : $f_A^n = f_{A^n}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, unde $f_A^n = f_A \circ f_A \circ \ldots \circ f_A$, compunerea făcîndu-se de n ori.

Gheorghe Alexandru, profesor, Rm. Vîlcea

21088. Dacă $x, y \geq 0$ și $a, b > 0$, demonstrați inegalitatea :

$$(x^{2a} - y^{2a})(x^{2b} - y^{2b}) \geq \frac{4ab}{(a+b)^2} (x^{a+b} - y^{a+b})^2.$$

Gh. Stoica, București

21089*. Fie a un număr real strict pozitiv și $A, B \in \mathbf{R}[X]$ două polinoame reciproce de speța întîi și de grad m, respectiv n și $B(x) \neq 0$ pentru $x > 0$. Calculați :

i) $$I_1(a) = \int_{1/a}^{a} \frac{A(x)}{B(x)} (1 - x^{n-m-2}) dx,$$

ii) $$I_2(a) = \int_{1/a}^{a} \frac{A(x)}{B(x)} \cdot C(x) dx;$$

unde $C \in \mathbf{R}[X]$ este un polinom reciproc de speța a doua de grad $n-m-2$, iar n și m numere naturale de parități diferite, $n \geq m + 1$.

D. Acu, lector univ., Sibiu

21090. Fie inelul necomutativ $(R, +, \cdot)$ unde

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}.$$

a) Să se determine mulțimea

$$Z(R) = \{A \in R \mid AX = XA, \; (\forall) X \in R\}$$

și să se arate că este un subinel comutativ al lui R ($Z(R)$ se numește centrul inelului R).

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se arate că $(\forall) A, B \in R$, avem

1°. $AB - BA \in Z(R)$;

2°. $AB^2A = BA^2B$.

(A se vedea și problema 20811 din G.M. 6/1986).

Elemer Kiss, conf. univ., Tg. Mureș

21091*. Fie șirul $a_n = \int_0^{\ln n} \ln(1 + e^{-x})dx$, $n \geq 1$. Să se arate că $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și $\lim_{n \to \infty} a_n \in [1/2, 2]$.

Marcel Chiriță, profesor, București

21092. Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ și $f^k(x) \neq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, să se arate că f are cel mult k rădăcini reale, $k \geq 2$.
(O generalizare a problemei 20520 din G.M. 8/1985).

Simion Terchilă, profesor, Singeorz-Băi

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU O.I.M. și O.B.M.

O : 509. Să se demonstreze că printre numerele complexe de forma $z_\lambda = \dfrac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i}$, cu $\lambda \in \mathbb{Q}$, singurele care sînt rădăcini ale unității sînt $1, i$ și $-i$.

Nicolae Popescu și *Marcel Țena*

O : 510. Să se arate că în orice triunghi există inegalitatea

$$m_a \geq \frac{b + c}{2} \cos \frac{A}{2}.$$

În ce caz avem egalitate?

Mircea Lascu, profesor, Zalău

O : 511. Fie $a > 0$, $b > 0$ două numere raționale. Să se determine punctele de pe elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ care au coordonatele numere raționale.

Florin Vulpescu-Jalea, profesor, București

PROBLEME PENTRU CONCURSUL ANUAL AL REZOLVITORILOR

Clasele a IX-a și a X-a

C : 681. Să se calculeze suma :

$$C_n^1 + 2(n-1)C_n^2 + 3(n-1)^2 C_n^3 + \ldots + n(n-1)^{n-1} C_n^n.$$

Ion Ghica, profesor, Rm. Vîlcea

Scanned with OKEN Scanner

C: 632. Fie $f, g \in \mathbf{R}[X]$, două polinoame care verifică condițiile:

(i) $f(x) \geq g(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$;

(ii) Ecuația $f(x) - g(x) = 0$ are toate rădăcinile reale.

Dacă $h \in \mathbf{R}[X]$ este un polinom astfel încît $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, atunci există $\lambda \in [0, 1]$ astfel încît $h(x) = \lambda g(x) + (1 - \lambda) f(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

Ion Savu, București

C: 633. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ de laturi a, b, c respectiv a', b', c' și semiperimetru p, respectiv p', sînt asemenea dacă și numai dacă:

$$\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = 2\sqrt{pp'}.$$

Dumitru Verzeanu, profesor, Rm. Vîlcea

C: 634. Trei conuri circulare drepte, congruente, sînt tangente două cîte două și sînt tangente la un plan. Să se determine măsura unghiului la vîrf al unuia dintre aceste conuri.

Adalbert Kovacs și *Ivan Cernea*, Satu Mare

Clasele a XI-a și a XII-a

C: 635. Să se calculeze limitele șirurilor $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ definite astfel:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right);$$

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{2}{4k-1} + \frac{1}{4k} \right).$$

N. Păun, profesor, Rm. Vîlcea

C: 636. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ șirul definit prin: $a_1 \in \mathbf{N}^*$ iar a_{n+1} = cifra a n-a în scrierea zecimală infinită a numărului $\frac{a_n}{7}$. Demonstrați că suprimînd primii 37 termeni, șirul devine periodic.
(Reamintim că în scrierea zecimală infinită, înlocuim 1 cu 0,999....).

C. Voica, profesor, Buftea

C: 637. Să se calculeze fără utilizarea derivatei:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + nx\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{n(n+1)}{2} x\right)}{x^3}.$$

Nicolae Pavelescu, profesor, Rm. Vîlcea

Scanned with OKEN Scanner

C: 688. Dacă $f:[a, b] \to [c, d]$ este derivabilă cu derivata continuă și nenulă în fiecare punct, atunci are loc egalitatea:

$$\int_a^b x^{n-1} f^n(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} y^{n-1}(f^{-1}(y))^n\,dy = \frac{1}{n}(b^n f^n(b) - a^n f^n(a)),$$

unde $n \in \mathbf{N}^*$.

Alexandru Gheorghe, profesor, Rm. Vilcea

PROBLEME DE INFORMATICĂ

I: 317. Fie $A(M, N)$ o matrice oarecare. Se calculează:

$$S_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij},\ (\forall) i = 1, \ldots, M.$$

Să se dea un algoritm (eventual și programul FORTRAN) care să realizeze permutarea liniilor matricii A, corespunzător ordonării crescătoare a valorilor S_i: $S_{i_1} \leqslant S_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant S_{i_M}$.

Poliana Ștefănescu, cercetător, C.C.U.B.

I: 318. Să se precizeze funcția următorului subprogram FUNCTION scris în limbajul FORTRAN 77 pentru un minicalculator din familiile CORAL/INDEPENDENT:

```
      LOGICAL FUNCTION F(N)
      IF(N.EQ.1) THEN
         F = .FALSE.
      ELSE IF(N.EQ.2) THEN
         F = .TRUE.
      ELSE IF(MOD(N,2).EQ.0) THEN
         F = .FALSE.
      ELSE
         A = N
         DO 10 I = 3, SQRT(A), 2
            IF (MOD(N, I).EQ.0) THEN
            F = .FALSE.
            RETURN
            ENDIF
   10 CONTINUE
      F = .TRUE.
      ENDIF
      END
```

M. Vlada, București

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

SIMLEUL SILVANIEI (SĂLAJ) Lic. „S. Bărnuțiu" cl. VI Oiegaru Horațiu (100), Ș.g.1 cl. VI Fodor Cătălin (100), Pop Simona (100); **SOMCUTA MARE** (MARAMUREȘ) Ș.g. cl. VIII Frenț Gabriela (228), Ghiță Creola (123); **SMEENI** (BUZĂU) Ș.g. cl. V Dumitru Sofia (110); **STOINA** (GORJ) Ș.g. cl. VI Mănescu Elisabeta (111); **STREJNIC** (PRAHOVA) Ș.g. cl. VII Ene Gheorghe (210), Liseanu Gabriel (172);

SUCEAVA Ș.g.1 cl. V Bogdan Anamaria (85), Dorneanu Tudor (42), cl. VI Humoreanu Magda (125), Iacob Cristina (170), Petre Georgeta (37), Zlate Karin (130), cl. VII Baltag Dana (120), Bolohan Cristina (100), Condurache Simona (70), Fasolă Monica (55), Lang Richard (90), Mihăilă Mugurel (109), cl. VIII Brădățan Claudiu (76); Ș.g.2 cl. VI Boiciu Vlad (120), Marcu Ovidiu (159); Ș.g.3 cl. V Alexei Cezara (68), Cramariuc Gabriel (70), Croitoru Gabriela (52), Mihalache Loredana (57), Martiniuc Marilena (87), Seghediu Georgeta (30), Sturzu Daniela (47), Vlase Alexandru (100), cl. VI Baia Corina (30), Biholaru Anca (30), Biliuță Mihai (56), Braicu Bogdan (50), Ciutac Lucian (49), Ciubotariu Laura (70), Gheorghiță Bogdan (39), Jitaru Nicolae (30), Rusu Oana (30), cl. VII Hincu Cezar (92), Morosanu Mihaela (60), cl. VIII Bejan Anca (186), Pasăre Oana (49), Tudose Tiberiu (90), Tudorache Cristina (60); Ș.g.4 cl. V Bucaciuc Daniela (139), Chițimuș Cristina (65), Gavril Florina (50), Luca Florin (110),

Scanned with OKEN Scanner

Prelipcean Cristian (139), Şerban Elena (30), cl. VI Avram Margareta (155), Goian Gabriel (139), Maliş Gabriela (100), Rosenberg Marius (48), cl. VII Tugurlan Ionel (72), Morohoi Rodica (139), Maliş Gabriela (100), Rosenberg Marius (48), cl. VII Tugurlan Ionel (72), Morohoi Rodica (130); Lic. „Şt. cel Mare" cl. IX Creţu-Maria (112); **SUDRIGIU (BIHOR)** Ş.g. cl. VI Popa Călin (98), cl. VII Jurgiu Simona (80); **SURDUC** (SĂLAJ) Ş.g. cl. VII Tepan Liliana (100), Costin Susana (100), cl. VIII Bălănean Carmen (100);

TECUCI (GALAŢI) Grecu Geanina (72); Ş.g.2 cl. VI Motoca Paula (157), Nechiţă Ionică (72), Popescu Luiza (100), cl. VII Gherheanu F. (88), Vrabie Roman (180); Ş.g.4 cl. V Clobanu Cristian (60); Ş.g.5 cl. V Ivan Gina (91), Ureche Violeta (60), cl. VI Burghelea Monica (109), Iulius Raluca (90), Gheorghiu Daniela (86), Tacu Călălin (70), cl. VII Bucur Oana (129), Furnică Laura (105), Epure Alină (90); Ş.g.6 cl. V Terchi Doina (152), Topală Florinel (160); Ş.g.10 cl. VI Bîgea Manuela (247), Popa Daniela (50), Popa Dan (50), Tristan Anin (68), Pintilie Alina (108), Soare Adrian (103); **TIMIŞOARA** Ş.g. 20 cl. VII Tocuţ Alina (109); Ş.g.24 cl. VII Ghiriş Mihai (88), Bărbulescu Laura (130), cl. VIII Avram Ovidiu (132), Radu Simona (97); Lic. filolog. istorie cl. V Călălina Ioana (33), cl. VI Munteanu Gabriel (100); Lic. „C. D. Loga" cl. VI Iercoşan Călălin (78); **TITU (DÎMBOVIŢA)** Ş.g.cl. VII Constantin Daniela (127), Florescu Mihaela (87); **TÎRGOVIŞTE** Ş.g.1 cl. V Uţă Dragoş (54); Ş.g.2 cl. V Cîrnu Climea (110); Ş.g. 5 Gagiu Andreea (42), Grecu Ion (60), Mazilia Cristina (57), cl. VII Ciobotaru Lucica (136), Oprea Mihaela (126); Ş.g.6 cl. V Macri Etienne (167), Muşat Monica (199), Opincaru Alina (30), Pavşancea Mihaela (50), Stan Lorena (60), cl. VI Enache Corina (79), Martin Eugen (130), Matache Alina (180), Pătraşcu Viorica (60), Puşcoi Bogdan (130), cl. VII Antofie Adrian (95), Blidărescu Roxana (100), Crăcănel Florin (100), Rădulescu Anca (181); Ş.g.8 cl. VI Vlădeanu Corina (64); Ş.g. 11 cl. V Mudura Anca (60), cl. VI Murdura Anca (123); Toader Gabriela (127); **TÎRGU JIU** (GORJ) Ş.g.4 cl. VI Tîrsu Ana (80); Ş.g.8 cl. VI Cîrstea Traian (98); Ş.g.12 cl. VI Popescu Cornelia (80), Văduva Emanuel (100), Văduva Amalia (169); Lic. „T. Vladimirescu" cl. XI Coiculescu Ion (84); **TÎRGU LĂPUŞ** (MARAMUREŞ) Ş.g. 1 cl. VIII Leşe Sorin (30); Lic. ind. cl. XI Pop Călin (140); **TÎRGU MUREŞ** Ş.g. 15 cl. V Deppner Ada (39), cl. VI Tămpănariu Oana (140); Lic. mat. fiz. „Al. Papiu Ilarian" cl. VII Turdeanu Dragoş (92); **TÎRGU NEAMŢ** Ş.g. 3 cl. V Avădanei Irina (68), Cojocaru Cristinel (176), cl. VI Dănilă Dan (70); **TUBUCEŞTI** (GALAŢI) Ş.g. cl. V Brînză Săndica (85), Holban Tincuţa (87), cl. VI Dragomir Anişoara (93), Guţu Mihaela (91), cl. VII Chirănuş Florentina (90);

TULCEA Ş.g.11 cl. V Bucătariu Romeo (150), Bondarencu Georgeta (98), Stanca Mariana (100), Munteanu Paula (100), Ulianov Liliana (100), cl. VI Roman Robert (100); Ş.g.12 cl. VI Coroamă Dană (109); Lic. „Spiru Haret" cl. V Tănasie Otilia (97), cl. VI Sebastian Titel (286), Mihai George (100), Munteanu Gabriela (89), cl. VII Oană Sabin (240), Dumitru Graţiela (75), Poliect Daniel (79), cl. VIII Anghelescu Dan (109), Buzatu Adriana (71), cl. IX Mateiu Paul (59); **TURDA** (CLUJ) Ş.g. 6 cl. V Lup Bianca (85), Potra Oana (179), cl. VI Avram Iancu Horia (110), Vaida Marcel (66), Sdeorna Ovidiu (79), cl. VII Koto Erika (80), Botei Mariana (97), Mărginean Ioana (96), Mureşan Adina (72), Silaghi Mihaela (89); Ş.g. 7 cl. VI Popa Amalia (60); **TURNU MĂGURELE** (TELEORMAN) Ş.g. 2 cl. VI Ciurea Marina (96), Lic. ind. 2 cl. VI Aldea Claudius (131); **ŢĂNDĂREI** Ş.g. 4 cl. V Braşoveanu Iulian (90); **ŢIGLINA (GALAŢI)** Ş.g. cl. VI Gnezila Cristian (64); **ŢIBUCANI** (NEAMŢ) Ş.g. cl. V Grigore Elena (113);

ZAGĂR (MUREŞ) Ş.g. cl. V Hendrich Adolf (70), Ilieş Dinu (70), Mărginean Gabriel (64); **ZALĂU** (SĂLAJ) Ş. g. 1 cl. V Marian Alina (44), Nagy Andreea (50), cl. VI Bejenariu Gimtea (48), Deac Simona (60), Hosu Daniela (50), Marincaş Viorica (78), Petrea Viorel (60), Pop Diana (150), Rodina Horaţiu (48), Sabău Claudia (56), cl. VII Crăciunaş Adela (50), Petrea Mircea (75); Ş.g.5 cl. V Borş Cristina (120), Horincar Liana (70), Rus Gabriel Stelian (80), Titaş Loredana (70), cl. VI Bonţea Mihaela (100), Ghiurutan Anca (100), Margin Anca (120), Poenaru Bianca-Ioana (95), Pop Ioan (85), cl. VII Bordaş Lucreţia (113), Gligută Simona (120); fără menţine de clasă; Pop Marcel Nelu (47), Dumitraş Daniela (110); Ş.g.6 cl. IV Dan Maxim (158), cl. V Onac Alice (78), Petrea Horia-Cosmin (75); Ş.g.7 cl. V Grimdena Mihai (110), cl. VI Bălănean Tatiana (80), Colcer Monica (222), Drăgan Alina (65), Haţegan Marius (49), Iureşu Octavian (46), Merloiu Cecilia (79), Prodan Alina (153); fără menţiune de clasă: Ionescu Florin (48); Ş.g. „S. Bărnuţiu" cl. V Boda Robert (144), Mercea Alin (120), Pop Teodora (113), cl. VII Mureşan Ovidiu (80); Lic. ind. 1 fără clasă; Popescu Ioan (20); Lic. mat. fiz. cl. IV Chiş Simona (49), cl. V ProdanPaula (60), cl. VI Bria Crina (50), Covaci Iuliana (72), Curea Radu (67), Dine Mihai (42), Hada Otilia Gheorghina (89), Hăş Cristina Simona (77), Hodiş Dan-Horea (62), Pavel Marian Ştefan (60), Pop Elena-Lia (67), Pop Loredana (49), Turc Leontina Maria (57), cl. VII Bucşa Bianca (96), Cîmpean Maria (103), Gal Horia (105), Goganca (73), Hodiş Oana (74), Marian Monica (70), Mărginean Adriana (73), cl. IX Chezan Mihaela (65), Crişan Anca (110), Curteanu Carmen (74), Dîrjan Iosif (70), Bodea Daniela (100), Egedi Iosif (82), Filip Sorin (120), Goron Dana (67), Iacob Mircea Ciprian (78), Iureş Georgina (110), Matei Alice (119), Moigrădean Liliana (84), Morar Rodica (110), Negru Marian (20), Oanţă Eduard (70), Pop Stanca (50), Prodan Paula (94), Prodan Simona (100), Puşcaş Călin (36), Săvus Cristian (30), Serafim Călin (70), Teglaş Florin Sebastian (89); fără menţiune de şcoală cl. V Perţe Ioana Minodora (90), cl. VI Pop

Scanned with OKEN Scanner

Dumitru (150), Miloneau Sorin (44), cl. VII Chibzuloiu Carla (120) ; fără menţiune de clasă : Alexuţan Cristian (79), Nae Gabriel (99) ; **ZAMOSTEA** (SUCEAVA) Ş.g. cl. VI Alacoboae Irina (116) ; **ZIDURI** (BUZĂU) Ş.g. cl. VI Moise Costel (29) ; **ZIGONENI** (ARGEŞ) cl. III Velea Monica (105) ; **ZIMNICEA** (TELEORMAN) Ş.g.1 Măgură Liviu-Robertino (98).

ADJUD (VRANCEA) Ş.g. 2 cl. V Roşcan Ciprian (108) ; **AIUD** (ALBA) Ş.g. 1 cl. VI Gligor Mihaela (160) ; **AFUMAŢI** (DOLJ) Ş.g. cl. VI Preda Dumitru (95) ; **ALEXANDRIA** (TELEORMAN) Ş.g. 3 cl. V Ionescu Alina (56), cl. VII Niculae Luminiţa (107) ; **ALTÎN-ŢEPE** (TULCEA) Ş.g. cl. V Vinogradov Gianina (230) ; **ARAD** (ARAD) Lic. „I. Slavici" cl. VIII Verzea Valentin (278) ; **AZUGA** (PRAHOVA) Ş.g. cl. V Ureche Ioana (80), cl. VI Tuţuianu Elena (135), cl. VII Andrieşanu Valentina (917), Neagoe Elena (92), Oprea Denisa (84), Popescu Daniela (30), Stanciu Gabriela (120), Stoicescu-Daniela (140).

BACĂU (BACĂU) Ş.g. 15 cl. V Asaftei Laura (80) ; Ş.g. 19 cl. VI Butnaru Loredana (78), Ungureanu Dana (80), Vasiliu Gabriela (63) ; Lic. „G. Bacovia" cl. IX Bairac Ioana (39), Panţiru Mariana (48), Proca Silvia (30), Ignătescu Cristian (84) ; Lic. ped. „Ştefan cel Mare" cl. VI Cosma Adrian (95) ; **BAIA MARE** (MARAMUREŞ) Ş.g. 8 cl. VII Marchiş Sanda (90), Ş.g. 17 cl. V Tiplea Simona (70), cl. VI Firizan Maria (78) ; **BĂLTĂŢEŞTI** (VASLUI) Ş.g. cl. VII Bălţătescu Mihaela (100) ; **BEIUŞ** (BIHOR) Ş.g. cl. VII Suvaina Adrian (110), Varga Adrian (100) ; **BENEŞART** (SĂLAJ) Ş.g. cl. V Boda Crinuţa (35), Opriş Vasile (40), cl. VI Boda Simona (96), Cormoş Rozalia (94), Moş Florica (64), Mureşan Volinaş (90), Pintea Traian (80), Taloş Sorina (100) ; cl. VII Boda Luminiţa (80), Cozma Dafin (95), Guţ Florica (95), Moş Maria (75), Năpăţeanu Florin (78), Pintea Dan (80) ; **BÎRLAD** (VASLUI) Lic. „Gh. Roşca Codreanu" cl. IX Bălmuş Maria (75) ; **BOTOŞANI** (BOTOŞANI) Ş.g. 13 cl. VI Paraschiv Dorel (110), Rapaport Felicia (120), Tiganiuc Cipriana (90) ; Lic. „M. Eminescu" cl. VII Birzu Mihaela (258) ; **BOZOVICI** (CARAŞ-SEVERIN) Ş.g. cl. V Stoinel Marius (100) ; **BRAŞOV** (BRAŞOV) Ş.g. 5 cl. VIII Ţăranu Octavian (60), Urs Alina (50), Velcu Bogdan (60) ; Ş.g. 22 cl. VIII Incze Cristina (100) ; Ş.g. 26 cl. VI Zimbren Paula (100) ; Ş.g. 28 cl. V Bustan Catrinel (60) ; Lic. ped. cl. V Voina Liana (100) ; **BRĂILA** (BRĂILA) Ş.g. 7 cl. IV Derviş Monica (100), cl. V Ciurdariu Camelia (69) ; Ş.g. 25 cl. VII Bolboceanu Elena (96) ;

BUCUREŞTI Ş.g. 11 cl. VII Popescu Patrick (175) ; Ş.g. 15 cl. VII Popescu Ioana (220) ; Ş.g. 20 cl. V Masgraş Ligia (130) ; Ş.g. 30 cl. V Alexandru Mihaela (90) ; Ş.g. 36 cl. VIII Arapacă Corina (35) ; Ş.g. 49 cl. VII Alessandrescu Alina (89) ; Ş.g. 56 cl. VI Smărăndoiu Liviu (180) ; Ş.g. 70 cl. VI Lepădatu Adrian (220) ; Ş.g. 108 cl. VIII Lupu Monica (91) ; Ş.g. 155 cl. VI Isvan Eugenia (85) ; Ş.g. 156 cl. VII Nicolaescu Răzvan (95), Radu Sorin Andrei (40), Vlăşceanu Valeriu (83) ; Ş.g. 157 cl. VII Barus Adrian (118), Beju Ştefan (91), Dumitrescu Clara (76), Iosub Mona-Lisa (100), Orban Gabriel (79), Scorţea Bogdan (124), Stanciu Loredana (55) ; Ş.g. 172 cl. V Grabari Magdalena (68) ; Ş.g. 174 cl. VII Nagy Romaniţa (40) ; Ş.g. 177 cl. VI Maniţiu Ingrid (126) ; Ş. g. 194 cl. VI Luţă Magdalena (100) ; Lic. ind. 27 cl. IX Stratescu Marius (201) ; Lic. ind. 31 cl. IX Oancea Carmen (60) ; Lic. ind. 33 cl. V Zsehranozky Peter (125), Piroska Elisabeta (106) ; Lic. ind. 34 cl. V Valeriu Ruxandra (388) ; Lic. ind. 35 cl. VII Chirilă Mariela (62) ; Lic. mat. fiz. 1 cl. X Vlădescu Cătălina (72) ; Lic. ind. „I. L. Caragiale" cl. IX Diaconu Mihaela (38), Dumitrescu Daniela (100), Popa Daniela (100) ; **BUZĂU** (BUZĂU) Ş.g. 15 cl. V Buga Monica (50).

CARACAL (OLT) Ş.g. 2 cl. VI Pană Ramaiana (130), cl. VII Dinu Loredana (129), Tătaru Adela (130), cl. VIII Cranta Lorellay (85) ; Ş.g. 5 cl. VII Ţianu Anca (76) ; Ş.g. 6 cl. V Tene Mihaela (60) ; **CĂLĂRAŞI** (SLOBOZIA) Ş.g.4 cl. VI Baicu Adina (156), Baicu Maria (76) ; **CĂLINEŞTI** (TELEORMAN) Ş.g. cl. VI Ciobotoiu Emil (42), cl. VII Tone Mihaela (50), cl. VIII Ivan Mihaela (58), Mladin Mihaela (100), Petre Ioana (50) ; **CĂPÎLNA** (BIHOR) Ş.g. cl. VIII Buturugă Mirela (110) ; **CĂŞEIU** (CLUJ) Ş.g. cl. VI Prundus Corina (104), cl. VII Daboc Florina (100) ; Petre Gabriel (210) ; **CĂZĂNEŞTI** (VÎLCEA) Ş.g. 2 cl. IV Simion Doina (86) ; **CEHU-SILVANIEI** (SĂLAJ) Ş.g. cl. IV Racolţa Monica (150) ; cl. VI Pop Mihai (197), cl. VII Pop Ancuţa (75), Trandafir Răzvan (194) ; **CERNAVODĂ** (CONSTANŢA) Ş.g. 3 cl. VI Corbaru Cristina (118), Gherlan Nicoleta (130), cl. VII Vlădăreanu Simona (80), cl. VIII Hânsă Tiberiu (90) ; Ş.g. 4 cl. VI Crjstache Nadina (780), Dumitru Victor (180), Giurcă Sorin (180), Constantinescu Iulian (80), Manole Raluca (85) ; **CÎMPULUNG MOLDOVENESC** Ş.g. 3 cl. V Tudose Radeş (100), cl. VI Boca Mihaela (106), Corci Adriana (89), Erlich Iuliana (80), Sevciuc Mihaela (60), Ungurianu Cristian (95) ; Lic. Militar „Ştefan cel Mare" cl. IX Oblesniuc Filaret (80) ; **CÎMPULUNG MUSCEL** (ARGEŞ) Ş.g. 5 cl. VI Olaru Alina (90) ; **CÎNDEŞTI** (ARGEŞ) Ş.g. 1 cl. VI Jupînu Mihaela (24), Hanceriuc Ovidiu (70) ; (va urma).

I. P. Informaţia c. 1077

Index 43 460

Lei 3,50